

85-990  
L/1847.1 F  
MARÉE

**SERVICE HYDROGRAPHIQUE ET OCÉANOGRAPHIQUE DE LA MARINE**

# MARÉES

FASCICULE 1

Chapitres I à VIII

G. BESSERO

Ingénieur Principal de l'Armement

1985

Toute correspondance relative à ce fascicule doit être adressée à :

ÉTABLISSEMENT PRINCIPAL  
DU SERVICE HYDROGRAPHIQUE ET OCÉANOGRAPHIQUE  
DE LA MARINE

B.P. 426. — 29275 BREST CEDEX

## SOMMAIRE

### Chapitre I - GENERALITES ET DEFINITIONS

- 1 - Introduction
- 2 - Définitions relatives à la marée
- 3 - Caractéristiques spectrales de la marée
- 4 - Types de marée
- 5 - Marnages
- 6 - Propagation de la marée dans les océans
  - 6.1 - Ondes-marées ; lignes cotidales
  - 6.2 - Rôle de la forme des bassins ; résonance
  - 6.3 - Marées en eaux peu profondes
  - 6.4 - Courants de marée
- 7 - Aperçu historique de l'étude des marées
  - 7.1 - De l'Antiquité à la Renaissance
  - 7.2 - Les théories de NEWTON
  - 7.3 - La théorie dynamique des marées
  - 7.4 - Les modèles numériques

### Chapitre II - OBSERVATION DE LA MAREE

- 1 - Nécessité des observations de marée
- 2 - Les observatoires ponctuels
  - 2.1 - Les échelles de marée
  - 2.2 - Les marégraphes
    - 2.2.1 - Marégraphes à flotteurs
    - 2.2.2 - Marégraphes à pression
  - 2.3 - Pratique des observations
    - 2.3.1 - Marégraphes de surface
    - 2.3.2 - Marégraphes immergés
  - 2.4 - Dépouillement et vérification des enregistrements
- 3 - Méthodes de détermination globales de la marée
  - 3.1 - Etude des perturbations d'orbite des satellites
  - 3.2 - Altimétrie par satellite

### Chapitre III - FORCE GENERATRICE DE LA MAREE

- 1 - Coordonnées astronomiques et mesure de temps
  - 1.1 - La sphère céleste
  - 1.2 - La Terre
  - 1.3 - Coordonnées astronomiques
    - 1.3.1 - Définition d'un système de coordonnées

- 1.3.2 - Coordonnées horizontales
- 1.3.3 - Coordonnées horaires
- 1.3.4 - Coordonnées équatoriales célestes
- 1.3.5 - Coordonnées écliptiques
- 1.3.6 - Transformation de coordonnées
- 1.3.7 - Changement de lieu d'observation
- 1.4 - Mesure du temps
  - 1.4.1 - Temps sidéral
  - 1.4.2 - Temps solaire vrai
  - 1.4.3 - Temps moyen
  - 1.4.4 - Temps civil
  - 1.4.5 - Temps universel
  - 1.4.6 - Temps atomique
  - 1.4.7 - Temps universel coordonné
  - 1.4.8 - Date
- 2 - Définition de la force génératrice de la marée
- 3 - Etude de la force génératrice
  - 3.1 - Construction géométrique
  - 3.2 - Périodicité de la force génératrice
    - 3.2.1 - Astre dans l'équateur
    - 3.2.2 - Astre non dans l'équateur
  - 3.3 - Grandeur de la force génératrice. Valeurs numériques
- 4 - Potentiel générateur de la marée
  - 4.1 - Définition du potentiel d'un champ de force
  - 4.2 - Calcul du potentiel générateur
  - 4.3 - Introduction des coordonnées horaires de l'astre
  - 4.4 - Périodes des termes du potentiel

#### Annexe 1 : Formules de trigonométrie sphérique

- 1 - Formule fondamentale
- 2 - Autres formules

#### Annexe 2 : Eléments de mécanique newtonienne

- 1 - Notions de cinématique
- 2 - Principe de la mécanique newtonienne
- 3 - Dynamique du solide
- 4 - Attraction universelle
- 5 - Mouvement d'un point dans un repère lié à la Terre

#### Chapitre IV : THEORIE STATIQUE

- 1 - Généralités
- 2 - Calcul de la dénivellation
- 3 - Etude de la marée statique
  - 3.1 - Forme de la surface libre
  - 3.2 - Influence du bourrelet liquide
  - 3.3 - Caractéristiques de la marée statique
  - 3.4 - Critique de la théorie statique

- 4 - Marées terrestres
- 5 - Marées océaniques à longue période
- 6 - Influence des continents

## Chapitre V : THEORIE DYNAMIQUE - FORMULE DE LAPLACE

- 1 - Généralités
  - 1.1 - Nécessité d'une théorie dynamique
  - 1.2 - Principes de la théorie dynamique
    - 1.2.1 - Principe des oscillations forcées
    - 1.2.2 - Principe de la superposition des petits mouvements
  - 1.3 - Validité des principes de la théorie dynamique
  - 1.4 - Théorie dynamique des marées
- 2 - Etablissement de la formule de Laplace
  - 2.1 - Développement du potentiel
  - 2.2 - Calcul de la hauteur d'eau
- 3 - Etude de la marée au cours d'une journée à l'aide de la formule de Laplace
  - 3.1 - Généralités
  - 3.2 - Variation des éléments astronomiques
    - 3.2.1 - Angles horaires
    - 3.2.2 - Déclinaisons
    - 3.2.3 - Distances
  - 3.3 - Expression de la hauteur d'eau
  - 3.4 - Etude de la marée semi-diurne
    - 3.4.1 - Détermination approchée des pleines et basses mers
    - 3.4.2 - Heures des pleines et basses mers
    - 3.4.3 - Hauteurs des pleines et basses mers
    - 3.4.4 - Variation des hauteurs des pleines et basses mers
    - 3.4.5 - Intervalle de temps entre deux pleines mers consécutives
  - 3.5 - Etude de la marée diurne à l'aide de la formule de Laplace
    - 3.5.1 - Détermination des pleines et basses mers
    - 3.5.2 - Vive-eau et morte-eau
  - 3.6 - Combinaison des marées diurne et semi-diurne
- 4 - Validité de la formule de Laplace

## Chapitre VI : FORMULE HARMONIQUE DE LA MAREE

- 1 - Généralités
- 2 - Développement harmonique du potentiel luni-solaire
  - 2.1 - Potentiel générateur de la marée lunaire
  - 2.2 - Potentiel générateur de la marée solaire
  - 2.3 - Développement de DOODSON
    - 2.3.1 - Choix des variables fondamentales
    - 2.3.2 - Expression du potentiel luni-solaire

- 3 - Réponse de l'océan à l'excitation du potentiel
  - 3.1 - Equations des ondes longues
  - 3.2 - Marées océaniques
  - 3.3 - Marées dans les mers littorales
- 4 - Phénomènes météorologiques
- 5 - Formule harmonique de la marée

## Chapitre VII : ETUDE DE LA MAREE D'UN PORT

- 1 - Généralités
- 2 - Etude de la marée semi-diurne
  - 2.1 - L'onde lunaire moyenne  $M_2$
  - 2.2 - L'onde solaire moyenne  $S_2$
  - 2.3 - L'onde elliptique lunaire moyenne  $N_2$
  - 2.4 - L'onde déclinaisonnelle luni-solaire  $K_2$
- 3 - Etude de la marée diurne
  - 3.1 - L'onde déclinaisonnelle luni-solaire  $K_1$
  - 3.2 - L'onde lunaire diurne  $O_1$
  - 3.3 - L'onde solaire diurne principale  $P_1$
- 4 - Influence des ondes supérieures et composées
- 5 - Les types de marée
  - 5.1 - Description de la marée au cours d'une journée
  - 5.2 - Classification de la marée en quatre types
  - 5.3 - Caractéristiques de la marée d'un port

## Chapitre VIII : ANALYSE HARMONIQUE DES OBSERVATIONS DE MAREE

- 1 - Généralités
  - 1.1 - Le bruit dans les analyses de marée
  - 1.2 - Critère de séparation
  - 1.3 - Corrections nodales
  - 1.4 - Echantillonnage des observations
  - 1.5 - Principe de l'analyse harmonique
- 2 - Méthodes d'élimination
  - 2.1 - Principe
  - 2.2 - Méthode des heures spéciales
    - 2.2.1 - Séparation de l'onde  $l$  et de ses harmoniques
    - 2.2.2 - Séparation de l'harmonique  $l_k$
    - 2.2.3 - Remarques
  - 2.3 - Méthode de DOODSON
- 3 - La méthode des moindres carrés
  - 3.1 - Principe
  - 3.2 - Cas des observations périodiques
  - 3.3 - Recherche d'ondes mal séparées

- 4 - La méthode des hauteurs réduites
  - 4.1 - Introduction
  - 4.2 - La réduction des hauteurs
  - 4.3 - Calcul des constantes harmoniques
    - 4.3.1 - Méthode des moindres carrés
    - 4.3.2 - Analyse de Fourier
- 5 - Contrôle des erreurs sur les observations

Annexe : La méthode d'analyse harmonique de DOODSON

- 1 - Principe
- 2 - Application
  - 2.1 - Séparation des espèces
  - 2.2 - Séparation des groupes
  - 2.3 - Séparation des sous-groupes
  - 2.4 - Remarques

Chapitre IX : METHODES D'ANALYSE NON HARMONIQUES

- 1 - Généralités
- 2 - La méthode des concordances
  - 2.1 - Définition de la concordance
  - 2.2 - Conditions de concordance
    - 2.2.1 - Application de la formule de Laplace
    - 2.2.2 - Application de la formule harmonique
  - 2.3 - Etude de la concordance entre les pleines ou basses mers
    - 2.3.1 - Principe
    - 2.3.2 - Concordance en hauteur
    - 2.3.3 - Concordance en heure
  - 2.4 - Analyse des courbes de marée par concordance
    - 2.4.1 - Principe
    - 2.4.2 - Définition des hauteurs relatives
    - 2.4.3 - Détermination des courbes types
- 3 - La méthode de LAPLACE
  - 3.1 - Cas général
  - 3.2 - Cas d'une marée semi-diurne prédominante
- 4 - La méthode de réponse (ou méthode de convolution)
  - 4.1 - Principe
  - 4.2 - Détermination de la fonction d'entrée
    - 4.2.1 - Potentiel générateur de la marée
    - 4.2.2 - Rayonnement solaire
  - 4.3 - Analyse linéaire
  - 4.4 - Analyse des interactions non linéaires
  - 4.5 - Autres applications

## Chapitre X : PREDICTION DE LA MAREE : METHODES PRECISES

- 1 - Généralités
- 2 - Prédiction par la formule de LAPLACE
  - 2.1 - Principe
  - 2.2 - Etapes du calcul
- 3 - Prédiction harmonique
  - 3.1 - Principe
  - 3.2 - Calcul des hauteurs en fonction du temps
    - 3.2.1 - Méthode directe
    - 3.2.2 - Méthode des hauteurs réduites
  - 3.3 - Calcul des pleines et basses mers
    - 3.3.1 - Analyse de la courbe dérivée
    - 3.3.2 - Analyse de la courbe de marée
- 4 - Les annuaires de marée
  - 4.1 - Généralités
  - 4.2 - L'annuaire des marées du Service Hydrographique et Océanographique de la Marine
- 5 - Précision des prédictions

## Chapitre XI : PREDICTION DE LA MAREE : METHODES EXPEDITIVES

- 1 - Généralités
- 2 - Prédiction des pleines et basses mers
  - 2.1 - Application des concordances
  - 2.2 - Prédiction par le Saros
  - 2.3 - Application de la formule harmonique
- 3 - Prédiction de la hauteur à un instant quelconque
  - 3.1 - Application de la formule harmonique
    - 3.1.1 - Méthode de l'amirauté britannique
    - 3.1.2 - Méthode de l'annuaire allemand
  - 3.2 - Méthode de la sinusoïde
  - 3.3 - Courbes types
  - 3.4 - Tables permanentes

## Chapitre XII : NIVEAUX CARACTERISTIQUES ET REDUCTION DES SONDES

- 1 - Généralités
- 2 - Niveaux extrêmes de la marée
  - 2.1 - Détermination directe
  - 2.2 - Déterminations indirectes
    - 2.2.1 - Détermination par concordance
    - 2.2.2 - Détermination par la formule de LAPLACE
    - 2.2.3 - Détermination par la formule harmonique

- 3 - Zéro des cartes ou zéro hydrographique
  - 3.1 - Définition
  - 3.2 - Zéro hydrographique en France
  - 3.3 - Zéro hydrographique des cartes étrangères
- 4 - La réduction des sondes
  - 4.1 - Le zéro des sondes
  - 4.2 - Les levés côtiers
  - 4.3 - Les levés au large
  - 4.4 - Exécution des sondages

### Chapitre XIII : NIVEAU MOYEN

- 1 - Définition
- 2 - Observation du niveau moyen
  - 2.1 - Médimarémètre
  - 2.2 - Marégraphes
  - 2.3 - Observations par satellites
- 3 - Calcul du niveau moyen
  - 3.1 - Principe
  - 3.2 - Méthodes de calcul du niveau moyen journalier
    - 3.2.1 - Méthode planimétrique
    - 3.2.2 - Combinaison de hauteurs horaires
  - 3.3 - Calcul des niveaux moyens mensuels et annuels
- 4 - Les variations du niveau moyen
  - 4.1 - Variations temporelles
    - 4.1.1 - Phénomènes périodiques
    - 4.1.2 - Phénomènes météorologiques et océanographiques
    - 4.1.3 - Phénomènes séculaires
  - 4.2 - Variations spatiales

### Chapitre XIV : LES COURANTS DE MAREE

- 1 - Généralités
- 2 - Observations des courants
  - 2.1 - Méthodes directes
    - 2.1.1 - Mesures au point fixe
    - 2.1.2 - Mesures lagrangiennes
  - 2.2 - Méthodes indirectes
- 3 - Etude du courant de marée en un point
  - 3.1 - Représentation des courants
  - 3.2 - Types de courants de marée
    - 3.2.1 - Courants alternatifs
    - 3.2.2 - Courants giratoires
- 4 - Analyse des courants de marée
  - 4.1 - Analyse harmonique
  - 4.2 - Analyse par concordance

- 5 - Prédiction des courants de marée
- 6 - Relation entre la marée et les courants de marée

## Chapitre XV : PROPAGATION DE LA MAREE

- 1 - Généralités
- 2 - La résolution des équations de la marée
  - 2.1 - Solutions analytiques
  - 2.2 - Méthodes empiriques
  - 2.3 - Méthodes semi-empiriques
  - 2.4 - Les modèles numériques
  - 2.5 - Les modèles hydrauliques
- 3 - Les marées océaniques
- 4 - Les marées littorales
- 5 - les marées fluviales
- 6 - Aspects énergétiques
  - 6.1 - Equation de conservation de l'énergie
  - 6.2 - Bilan énergétique

## Appendice 1 : ELEMENTS DE THEORIE DU SIGNAL

- 1 - Séries et transformées de Fourier
  - 1.1 - Séries finies
  - 1.2 - Série de Fourier infinie
  - 1.3 - Transformée de Fourier
  
- 2 - Systèmes linéaires et convolution
  - 2.1 - Propriétés des produits de convolution
  - 2.2 - Applications
    - 2.2.1 - Echantillonnage
    - 2.2.2 - Signal de longueur finie
  
- 3 - Notions de probabilités
  - 3.1 - Définitions
  - 3.2 - Moments des variables aléatoires réelles
  - 3.3 - Variables aléatoires liées
  - 3.4 - Exemples de lois de probabilité
  
- 4 - Estimation statistique
  - 4.1 - Principe
  - 4.2 - Choix de l'estimateur
  - 4.3 - Exemple : variance empirique d'une loi gaussienne
  - 4.4 - Estimation par les moindres carrés
  
- 5 - Processus stochastiques
  - 5.1 - Définitions
  - 5.2 - Caractéristiques temporelles
    - 5.2.1 - Définitions
    - 5.2.2 - Propriétés
    - 5.2.3 - Estimation
  - 5.3 - Caractéristiques spectrales
    - 5.3.1 - Définitions
    - 5.3.2 - Estimation

## Appendice 2 : BIBLIOGRAPHIE

## C H A P I T R E   I

---

### Généralités et définitions

#### 1. Introduction

On appelle marée la variation à allure périodique du niveau de la mer due aux seules influences des astres. On ressent souvent le besoin de mieux préciser, et l'on utilise l'expression "marée d'origine astronomique"

Ce phénomène a longtemps intrigué par sa régularité apparemment accompagnée de variations inexplicables. Bien que la corrélation entre la marée et les phases de la lune ait été connue de tous temps, ce n'est qu'au début du dix-neuvième siècle qu'une théorie, bien qu'imparfaite, permit une prédiction correcte.

Il importe de souligner dès à présent la caractéristique principale de la marée : c'est une des images les plus parfaites que l'on puisse trouver d'un signal à composantes périodiques. Il sera donc aisé de lui appliquer les méthodes de l'analyse harmonique.

L'étude de la marée peut être abordée de deux points de vue complémentaires :

Le premier, à partir de notre connaissance du comportement du milieu physique, essaie de procéder à une quantification du phénomène indépendamment de toute observation.

Le second, beaucoup plus pratique, s'appuie sur la régularité des marées, liée directement à celle des actions de la lune et du soleil, pour déduire d'observations en un lieu donné des prédictions valables en ce lieu et dans son voisinage immédiat.

C'est ce second aspect qui constituera l'objet principal de notre cours ; quelques notions sur la propagation des ondes de marée seront examinées dans les dernières leçons .

Le cours ne se limitera pas à la définition donnée ci-dessus de la marée : on étudiera également les variations du niveau marin dues à d'autres influences que celles des astres, variations que l'on peut regrouper sous le nom de "niveau moyen".

Remarquons que le terme "marée" est parfois utilisé pour désigner la somme des variations d'origine astronomique et autres. On peut alors dire que la marée se décompose en marée d'origine astronomique et niveau moyen.

Tout au long du cours nous rencontrerons des terminologies imprécises ou fluctuantes. Cela est dû à l'influence de la littérature anglo-saxonne d'une part, au défaut d'une autorité scientifique française universellement reconnue d'autre part.

## 2. Définitions relatives à la marée

Les termes "marée" et "niveau moyen" ont déjà été définis. Les variations de ce "niveau moyen" peuvent présenter des aspects très divers :

- phénomènes périodiques mais d'origine non astronomique. Les principaux sont les seiches qui prennent naissance dans des bassins de forme particulière sous l'effet de forces extérieures (vent, pression). Leur période est en général assez courte (cinq minutes à une heure). Il existe également des ondes de plateau dont la période est supérieure au demi-jour pendulaire (pendule de Foucault). Ces phénomènes périodiques s'opposent à la marée par l'instabilité de leur phase.

"marées météorologiques", variations périodiques sous l'influence de vents alternatifs (vents "solaires" ou moussons par exemple) ou de variations de pression atmosphérique. Nous touchons ici une difficulté nouvelle : comment séparer ces mouvements de la marée d'origine astronomique ? On peut citer par exemple l'onde S<sub>2</sub> de période 12 h qui est en partie d'origine astronomique mais est modifiée par les variations de pression atmosphérique à la même fréquence exactement. La partie la plus régulière de ces variations périodiques est appelée "marée radiationnelle" dans la terminologie anglo-saxonne et on a même défini un "potentiel radiationnel" comme on définit un potentiel gravitationnel.

- phénomènes non périodiques. Ce sont principalement des variations dues au vent ou à la pression et qui peuvent prendre une grande ampleur ; on parle alors de raz-de-marée (storm surge), souvent catastrophiques sur les côtes des mers peu profondes (Pays-Bas par exemple). Il ne faut pas les confondre avec les "tsunamis", variations très brutales engendrées par des déformations brusques de l'écorce terrestre.

Nous rappellerons maintenant la définition de quelques termes usuels.

La courbe de la hauteur du niveau de la mer en fonction du temps s'appelle courbe de marée. (Figure 1)

Le niveau de la mer s'élève pendant un certain temps (six heures environ sur nos côtes) c'est le flux ou montant. Il atteint un maximum appelé pleine mer ; il baisse pendant un certain temps c'est le reflux ou perdant jusqu'à un minimum appelé basse mer.

On appelle marnage la différence de hauteur entre une pleine mer et une basse mer consécutives.

Le niveau moyen est souvent approché par moyenne (pondérée ou non), de la hauteur de la mer sur des périodes diverses. On parle alors de niveau moyen journalier, mensuel, annuel, etc.

Il ne faut pas confondre le niveau moyen journalier avec le niveau de mi-marée, moyenne d'une pleine mer et d'une basse mer consécutives.

On emploie également les termes "niveau moyen" et "niveau de mi-marée" en prédiction. Ce sont alors les meilleures estimations possibles de l'espérance mathématique des grandeurs déjà définies.

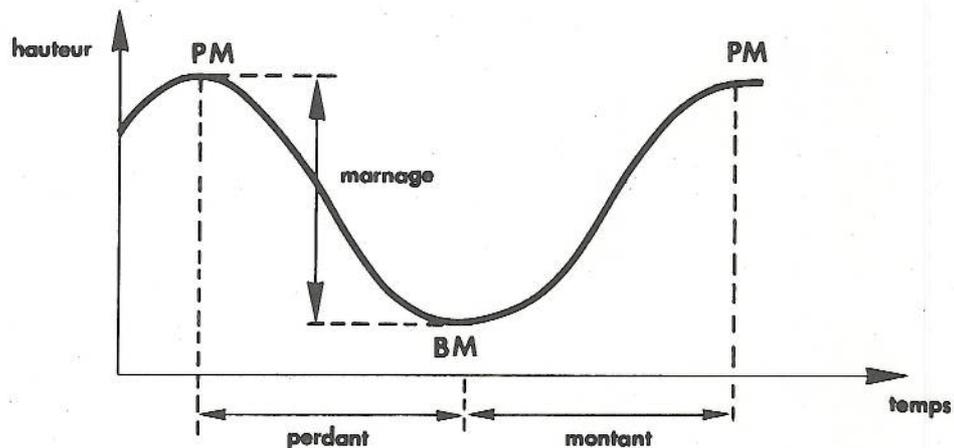


Fig.1 - Courbe de marée

### 3. Caractéristiques spectrales de la marée

Il importe de se familiariser avec les représentations de type spectral de la marée. Une transformée ou une série de Fourier ne procède pas d'un choix particulier et ne doit pas être considérée comme opposable, à telle ou telle théorie de la marée : c'est une représentation du phénomène, complémentaire de la représentation en fonction du temps.

Nous ne nous attacherons pas ici à une définition exacte du spectre. Il importe seulement de savoir qu'il représente l'amplitude, ou l'énergie (proportionnelle au carré de l'amplitude), en fonction de la fréquence (voir Appendice 1)

Le spectre de la marée est constitué de raies presque parfaites ; la figure 2 en donne une idée approchée, malgré la faible résolution . On remarque tout de suite que les raies sont réparties en groupes bien distincts séparés par des intervalles assez larges.

Le groupe le plus important est le groupe semi-diurne. Ceci est le cas dans la plupart des mers du globe. Ce groupe est apparemment plus large que les autres, mais il s'agit en réalité de "résidus" du calcul inévitables sur des périodes d'observation finies.

On remarque que l'on trouve de l'énergie jusque dans des fréquences très élevées (voisines de douze cycles par jour). Seuls les groupes diurne, semi-diurne et tiers-diurne représentent (en majeure partie tout du moins) l'influence directe de la lune et du soleil. Les autres groupes, qu'on peut qualifier d'harmoniques des groupes fondamentaux, apparaissent lors de la propagation de la marée par petits fonds. Les ondes qui les composent sont souvent appelées ondes d'interaction.

Le reste du spectre constitue le niveau moyen. On remarque que l'énergie du niveau moyen est appréciable principalement aux basses fréquences (inférieures à 2 cycles par jour).

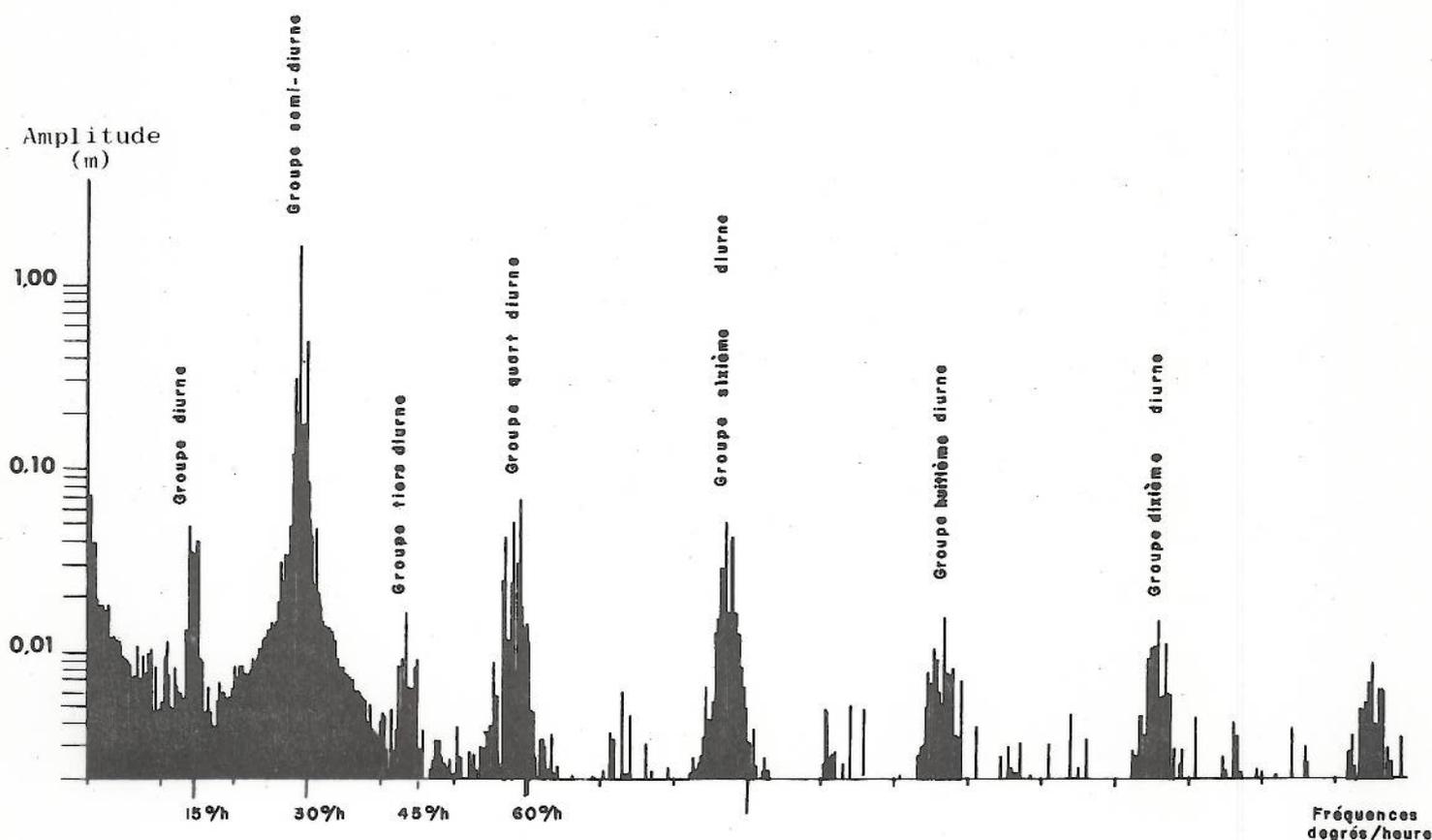


Figure 2

Exemple de spectre de marée

#### 4. Types de marées

Selon les régions, on peut observer au cours d'une journée : soit deux pleines et deux basses mers, on dit alors que la marée est semi-diurne ; soit une pleine mer et une basse mer, on dit que la marée est diurne.

D'une façon plus précise on peut classer les ports du globe en quatre types (Figures 3 et 4) .

##### 1) Ports à marées semi-diurnes

Dans ces ports on observe chaque jour deux pleines mers et deux basses mers ayant sensiblement mêmes hauteurs et se succédant à intervalles à peu près réguliers.

Le marnage est maximal après les syzygies (nouvelles et pleines lunes) : c'est la vive-eau ; il diminue (déchet) jusqu'après les quadratures : c'est la morte-eau puis réaugmente (revif). Cette variation des marnages constitue l'inégalité semi-mensuelle.

Ce type de marée domine sur les côtes d'Europe et de l'Océan Atlantique.

##### 2) Ports à marées semi-diurnes et à inégalité diurne

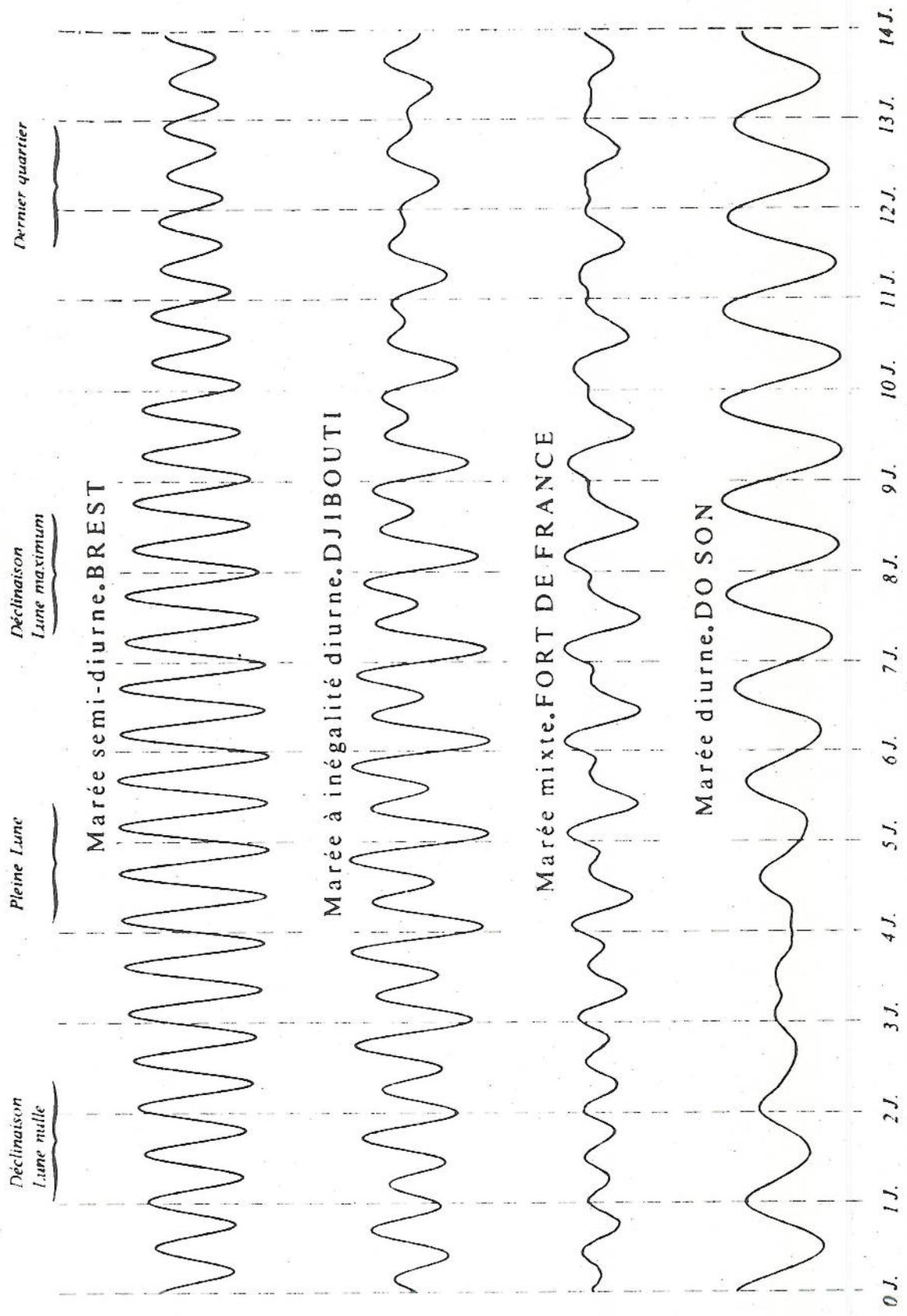
Dans ces ports, on observe chaque jour deux pleines mers et deux basses mers ; mais il existe des inégalités qui peuvent être très fortes entre les hauteurs des pleines et des basses mers d'une même journée et entre les durées du montant et du perdant . Cette différence de hauteur appelée inégalité diurne est maximale en même temps que les déclinaisons des astres.

Cette inégalité diurne, faible sur les côtes d'Europe et de l'Océan Atlantique (30 cm environ à Brest) devient très forte dans l'Océan Indien et en un certain nombre de ports de l'Océan Pacifique.

##### 3) Ports à marées mixtes

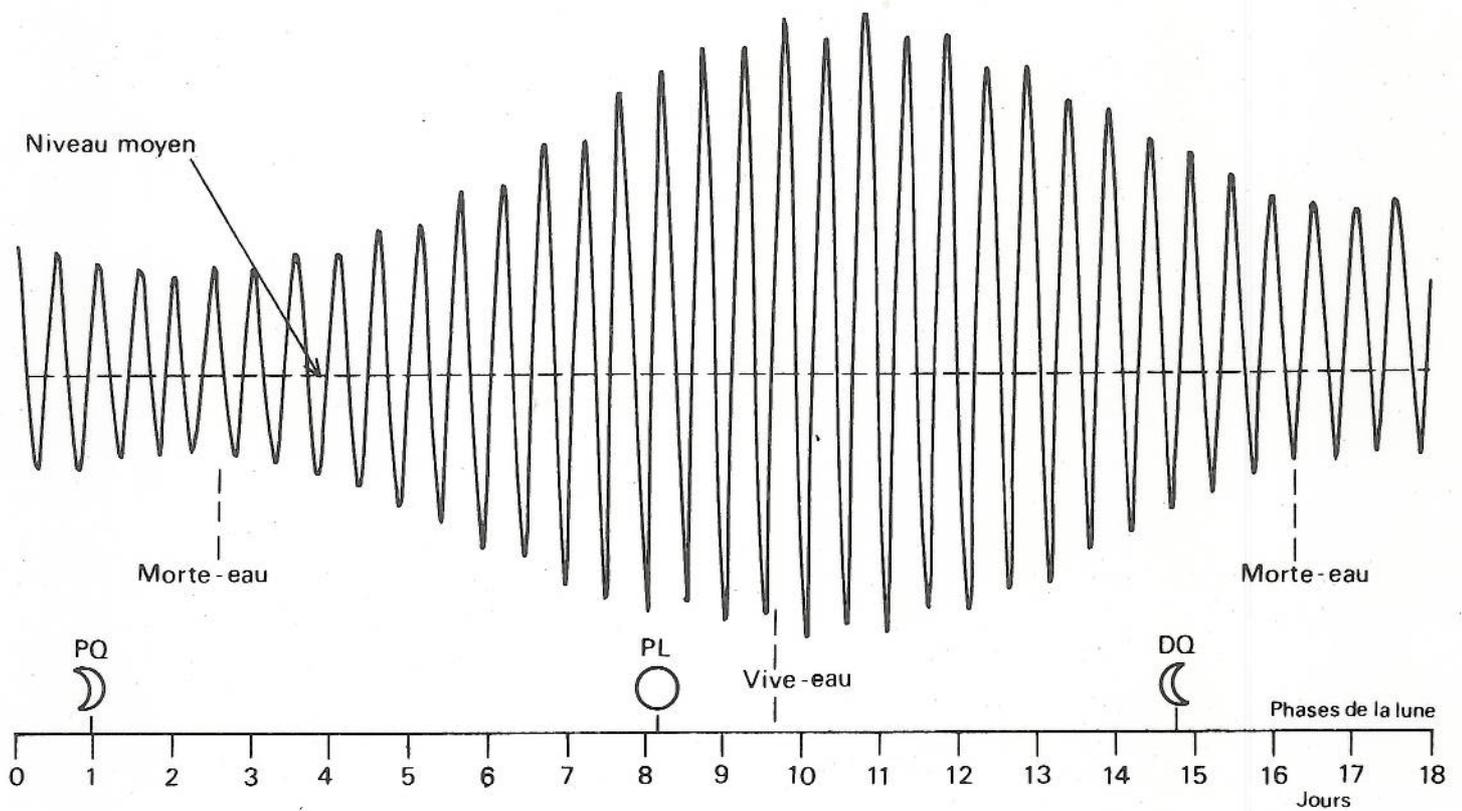
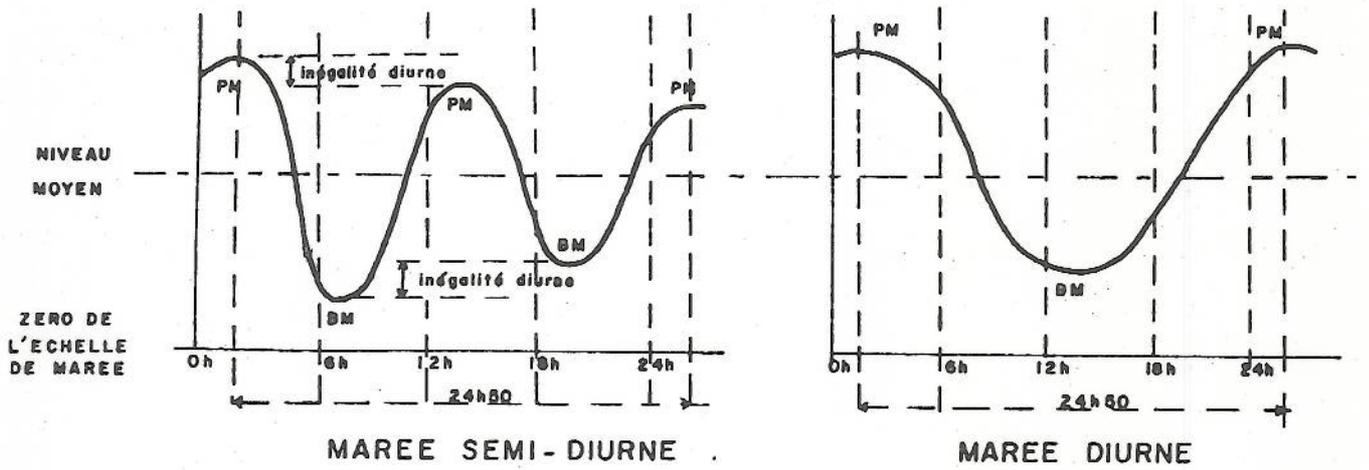
Dans ces ports on observe successivement au cours d'une lunaison, une période où la marée est semi-diurne et une période où la marée est diurne.

Ce type de marée est fréquent en Indonésie, en Indochine, sur les côtes de Sibérie et d'Alaska. On le rencontre également aux Antilles (Fort-de-France).

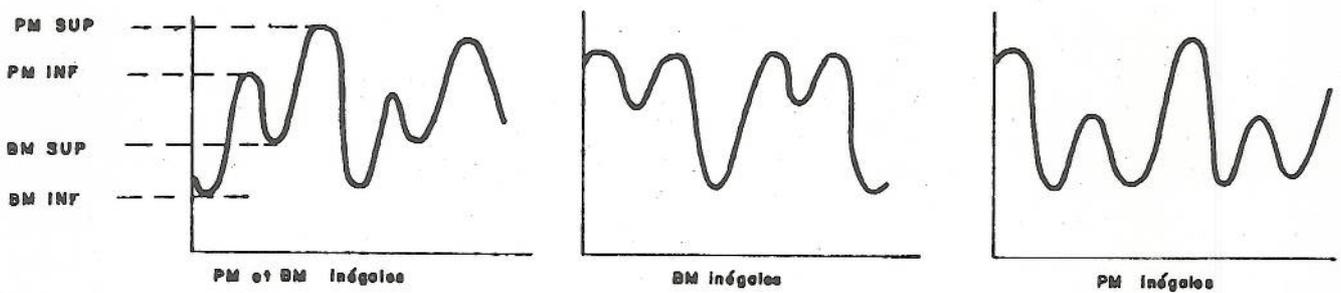


Principaux types de marées

Figure 3



Variations d'une marée de type semi-diurne en fonction des phases de la lune.



Marée semi-diurne à inégalités diurnes

Figure 4

#### 4) Ports à marées diurnes

Dans ces ports on n'observe qu'une seule pleine mer et une seule basse mer par jour lunaire. Les marnages sont fonction de la déclinaison des astres.

Ce type de marée est assez rare : on l'observe surtout dans l'Océan Pacifique sur les côtes de l'Asie du Sud-Est (Vietnam, Cambodge, Thaïlande) de la Sibérie (golfe de Penzhin en mer d'Okhotsk) et de l'Alaska (Saint-Michael).

#### 5 - Marnages

Les marnages observés à la surface du globe sont très variables. Dans les mers fermées, les marées sont très faibles. Elles sont insensibles en mer Noire. En Méditerranée, sur la côte sud de France, le marnage est de l'ordre de 10 à 20 cm donc difficile à séparer des dénivellations dues aux vents. Le marnage est un peu plus grand en Adriatique (0.5 m à Venise) et dans le golfe de Gabès (1.8 m). Au milieu des océans, le marnage est généralement faible, comme le montre les observations par grands fonds ou sur quelques îlots isolés comme Sainte-Hélène (0.8 m), Tahiti (0.2 m) ou La Réunion (0.4 m).

La faible marée du large s'amplifie souvent près des côtes de manière considérable, surtout au fond des baies en forme d'entonnoirs. Par exemple, le marnage en vive-eau moyenne passe de 4 mètres environ dans le fond du golfe de Gascogne, à 6 mètres à Brest et à plus de 12 mètres dans la baie du Mont Saint-Michel.

Le marnage le plus important du monde est observé au Canada, sur la côte Atlantique, en baie de Fundy (13 mètres en vive-eau moyenne à Burntcoat Head).

Les marnages des marées diurnes sont en général plus faibles que ceux des marées semi-diurnes. La figure 5 donne des indications sur le marnage et le type de marée à la surface du globe.

#### 6 - Propagation de la marée dans les océans

La marée est la manifestation de ce que l'on appelle une "onde de masse", c'est-à-dire que la vitesse des molécules est supposée indépendante de l'immersion. Cette approximation est certainement proche de la réalité, sauf au voisinage immédiat du fond de la mer (couche limite).

##### 6.1 - Ondes-marées, lignes cotidales

Dans chaque mouvement oscillatoire correspondant à une raie du spectre de la marée, tous les éléments (déplacements des molécules liquides, apport  $h_i$  de ce terme dans la marée totale, composantes de la vitesse des molécules, etc.) sont des



fonctions périodiques de la vitesse angulaire  $q$  du terme considéré ( $q = \frac{2\pi}{T}$ ) de la forme, pour la hauteur par exemple :

$$h_i = R_i (L, G) \cos [qt - r_i (L, G)]$$

expression dans laquelle  $L, G$ , représentent la latitude et la longitude moyenne de la molécule liquide à la surface terrestre.

Les mouvements oscillatoires des molécules liquides peuvent se manifester à la surface de la mer sous la forme d'une onde progressive, d'une onde stationnaire ou d'une combinaison de ces deux modes.

Onde-marée progressive : analogue à une houle très longue et d'amplitude très faible. C'est une onde de masse qui intéresse les eaux sur toute leur hauteur. Elle se propage avec une vitesse appelée célérité qui dépend de la profondeur  $H$  selon la formule

$$v = \sqrt{gH}.$$

La longueur d'onde est de l'ordre de quelques centaines de kilomètres donc très grande par rapport aux profondeurs océaniques (c'est pourquoi on parle d'ondes longues)

Une molécule liquide reste sensiblement dans un plan vertical parallèle à la direction de propagation et décrit une ellipse très allongée (quelques kilomètres) qui s'aplatit quand la profondeur augmente.

On appelle ligne cotidale le lieu des points où la pleine mer de l'onde se produit au même instant (caractérisé par  $\frac{\partial h_i}{\partial t} = 0$ ). Une ligne cotidale ne se confond pas en général avec une ligne de crête de l'onde marée (caractérisée par  $\frac{\partial h_i}{\partial t} = 0$ ) en raison des variations spatiales de l'amplitude  $R_i$ .

Le lieu des points tels que  $R_i$  soit constant s'appelle une ligne d'isonarnage (ou ligne d'équale amplitude). Les points amphidromiques sont les points où l'amplitude est nulle.

Onde-marée stationnaire : dans ce cas la fonction  $r_i(L, G)$  est indépendante de la position de sorte que la pleine mer (ou la basse mer) se produit à la même heure pour tous les points d'une même région. La zone maritime intéressée par cette onde stationnaire est ainsi partagée en "plages cotidales" séparées par des lignes ou "nodales" le long desquelles la marée est nulle ( $R_i(L, G) = 0$ ) mais où existent des courants traversiers. Dans les plages cotidales, le niveau de la mer s'élève et s'abaisse alternativement et la surface de la mer paraît éprouver une sorte de balancement autour de la nodale,

Les ondes-marées stationnaires sont analogues aux seiches des lacs avec la différence essentielle que celles-ci sont des oscillations libres, de période beaucoup plus courte, dues aux perturbations atmosphériques. Les seiches s'amortissent tandis que les ondes-marées sont entretenues.

Deux exemples d'ondes stationnaires sont bien connus :

- en mer Rouge où la nodale se trouve à la latitude de Port-Soudan et où l'amplitude atteint 0,60 m à l'entrée du golfe de Suez et 0,9 m à Perim au Sud-Yemen ;

- en mer d'Irlande où deux ondes dérivées pénètrent, l'une par le Nord, l'autre par le Sud ; on observe un ventre à la hauteur de l'île de Man où les courants sont nuls.

## 6 . 2. Rôle de la forme des bassins. Résonance

Alors que l'astronomie fournit avec précision les périodes des oscillations composant la marée, la configuration des bassins océaniques intervient pour déphaser les effets des forces élémentaires et donner aux oscillations des amplitudes qui sont souvent très loin d'être proportionnelles à la grandeur des forces en jeu.

En effet, les bassins peuvent devenir le siège d'oscillations propres dites aussi libres qui dépendent uniquement de leur constitution géométrique et des conditions initiales et qui s'amortissent sous l'effet du frottement. Chaque bassin océanique possède ainsi ses périodes propres d'oscillation.

Au contraire, une force périodique extérieure impose au système des oscillations contraintes sur la période desquelles la constitution du système n'a aucune influence. Elles sont entretenues et ne s'amortissent pas. Mais si cette période est voisine de la période propre d'oscillation du bassin, il se produira un véritable phénomène de résonance avec renforcement parfois considérable de l'amplitude.

C'est en se basant sur ces considérations que HARRIS, par exemple, essaya, en divisant l'ensemble de la mer en un certain nombre d'aires océaniques, d'expliquer au moins qualitativement les particularités de la marée sur le globe.

Notons enfin que les ondes-marées océaniques engendrent dans les mers secondaires, par exemple la Manche ou la Mer du Nord, des ondes dérivées entretenues et de même période.

### 6 . 3. Marées en eaux peu profondes

Il faut aussi tenir compte des phénomènes hydrauliques affectant la propagation de l'onde-marée dans les eaux peu profondes. D'après les lois de l'hydrodynamique, la vitesse de propagation (ou célérité) d'une onde est proportionnelle à la racine carrée de la profondeur :  $V = \sqrt{gH}$ . Lorsque celle-ci est grande, la dénivellation entre la pleine mer et la basse mer ne modifie pas de façon appréciable la vitesse de propagation . Au contraire, par faible profondeur, la dénivellation n'est plus négligeable par rapport à la profondeur. Le sommet de l'onde avance plus vite que le creux ; autrement dit la crête de l'onde a tendance à rattraper le creux qui la précède ; pour un observateur fixe, la montée du niveau de la mer est plus rapide que la baissée. Déjà à Brest cet écart est de 16 minutes ; mais le phénomène est particulièrement net dans les estuaires. A la limite on obtient un mascaret.

D'autres anomalies d'origine hydraulique peuvent être observées existence de deux pleines mers consécutives (Southampton) ; longue étale de niveau à la pleine mer (Le Havre) ; deux basses mers consécutives (Hock Van Holland) etc.

Ces phénomènes proviennent de la superposition à la marée du large d'ondes dites supérieures et composées de période plus faible, ondes qui viennent perturber la régularité du phénomène astronomique.

### 6 . 4. Courants de marée

La marée est un mouvement oscillatoire des molécules océaniques, analogue à ce qu'est la houle dans la couche superficielle des océans ; dans les deux cas, les molécules décrivent des trajectoires fermées, dans un plan vertical. Mais en raison de la faiblesse de la profondeur des mers par rapport à la longueur d'onde de la marée, le mouvement dû à ce phénomène intéresse toute l'épaisseur de la couche liquide : toutes les molécules ....

d'une même verticale décrivent des orbites sensiblement égales et extrêmement aplaties. L'amplitude du déplacement vertical, relativement faible, constitue la marée proprement dite ; les déplacements horizontaux sont au contraire importants et forment les courants de marée. Au large ces courants sont alternatifs et en opposition de phase avec la marée ; mais au voisinage des côtes ils sont profondément perturbés par les effets hydrauliques locaux. Les courants de marée tendent alors à devenir des courants de déversement correspondant au remplissage et à la vidange des baies marines sous l'effet de la marée, avec laquelle ils sont alors en phase. En outre leur direction varie souvent de façon complexe au cours d'une période, particulièrement près des rivages bordés d'îles ou de bancs où il existe parfois des courants giratoires dont la vitesse ne s'annule pas et dont la direction tourne de façon continue.

L'étude des courants de marée peut être faite comme celle de la marée, mais elle présente plus de difficultés en raison d'une part de la rapidité avec laquelle leurs caractéristiques peuvent varier d'un point à un autre, et d'autre part de leur moins grande régularité dans le temps : non seulement la part du courant d'origine non astronomique comparée au courant de marée est beaucoup plus grande que celle du niveau moyen par rapport à la marée, mais de plus les caractéristiques mêmes du courant de marée peuvent varier avec les conditions météorologiques et être perturbées par des ondes internes.

## 7 - Aperçu historique de l'étude des marées

### 7.1 - De l'Antiquité à la Renaissance

Il était difficile aux anciens d'étudier les marées en Méditerranée où elles sont faibles et le plus souvent masquées par les effets météorologiques. Les nécessités de la guerre et du commerce conduisirent cependant les Grecs et les Romains sur les côtes européennes et africaines de l'Atlantique, en mer Rouge et dans l'Océan Indien, où les marées importantes ne pouvaient manquer d'attirer leur attention. L'Antiquité nous a laissé un ensemble fort disparate d'opinions bizarres et d'aperçus judicieux qui font presque entrevoir les véritables causes du phénomène

Pour Platon (428-348 avant J.C.), les marées sont dues aux oscillations d'un liquide inclus à l'intérieur de la Terre. Aristote, 350 avant J.C, soupçonne confusément un lien entre les marées et le mouvement de la Lune. L'astronome et géographe Pythéas, né à Marseille, est sans doute le premier à noter une relation entre le marnage et les phases de la Lune, vers 325 avant J.C. Ces notions élémentaires sont reprises par les grands esprits jusqu'au début de l'ère chrétienne : Cicéron, Sénèque, Plin l'Ancien et plus tard Saint-Augustin.

Les connaissances acquises ne furent pas complètement perdues pendant les invasions barbares. On en retrouve des traces dans les littératures scandinaves et arabes et les pilotes du Moyen-Age devaient se transmettre des petits almanachs analogues à cette table de 1213 qui donne grossièrement l'heure de la pleine mer à Londres pour les différents jours de la Lune. L'attribution du phénomène à l'action de la Lune est mentionnée, au 13ème siècle, dans l'oeuvre de Saint-Thomas d'Aquin ou dans un poème de Dante, sans pour autant que la compréhension des mécanismes ait progressé.

## 7.2 - Les théories de Newton

En 1609, Kléper développe l'idée de l'attraction de la Lune pour expliquer les marées mais l'abandonne par la suite, ébranlé peut-être par sa controverse avec Galilée qui attribue, lui, la marée à l'effet des mouvements de translation et de rotation de la Terre. Les conceptions de Descartes marquent un retour aux théories attribuant les marées à l'action de la Lune, mais c'est Newton qui, en 1687, pose les fondements véritables de toutes les recherches ultérieures en rattachant la théorie des marées à son grand principe de la gravitation universelle dans son ouvrage "Philosophiae naturalis principia mathematica".

Newton admet que la cause des marées réside dans l'attraction exercée sur les molécules des Océans par la lune et le soleil, seuls astres à considérer en raison de leur proximité ou de leur masse. Un calcul très simple de mécanique céleste fournit l'expression de la force génératrice des marées en fonction des positions occupées par la molécule considérée et par les astres perturbant son équilibre. Ce calcul qui n'est qu'un cas particulier de résolution du problème des trois corps est identique à celui des perturbations planétaires

Il a pour base le fait qu'une molécule isolée, placée à la surface de la terre, subit, de la part d'un astre, une attraction légèrement différente en grandeur et en direction de celle qu'elle éprouverait si elle se trouvait au centre de la terre. Or, c'est cette dernière attraction qui intervient lorsqu'on considère le mouvement d'ensemble de la terre par rapport à l'astre attirant. Le petit écart entre ces deux forces exerce par conséquent sur la molécule une action qui tend à provoquer un déplacement de cette molécule, déplacement qui sera effectif si la molécule n'a pas de liaison rigide avec ses voisines, ce qui est le cas pour les molécules liquides des océans. La force que nous venons de définir est appelée force génératrice des marées ; inversement proportionnelle au cube de la distance de l'astre, elle est extrêmement faible, bien que proportionnelle à la masse de l'astre. Cet effet de distance est tellement prépondérant que l'action du soleil n'atteint pas la moitié de celle que la lune exerce.

La composante verticale de la force génératrice modifie légèrement l'influence de la pesanteur mais ne peut engendrer qu'une marée insignifiante en raison de la faible profondeur des océans par rapport au rayon de la terre ; au contraire l'effet de la composante horizontale s'ajoute de proche en proche sur toutes les molécules de l'océan sur un même quart de circonférence terrestre et provoque une dénivellation appréciable.

La force génératrice des marées, en raison de la rotation terrestre, admet une périodicité semi-diurne. Dans le cas où la déclinaison de l'astre n'est pas nulle, il s'introduit une inégalité diurne dans la variation de la force en un point. En fait, toutes les inégalités du mouvement de la lune autour de la terre et de la terre autour du soleil entraînent des inégalités correspondantes dans la force génératrice ( inégalités déclinaisonnelles, inégalités parallaxiques ) .

Pour relier la force génératrice des marées aux variations du niveau de la mer en un point donné, Newton suppose qu'à tout instant la surface des mers prend la figure d'équilibre correspondant à la position des astres à cet instant. Cette théorie statique des marées de Newton aboutit à un échec lors de la comparaison des résultats ainsi obtenus et ceux fournis par les observations. En effet, l'hypothèse de l'équilibre est inconciliable avec l'inertie des molécules liquides et la rapidité du mouvement des astres.

### 7.3 - La théorie dynamique des marées

La mécanique des fluides était encore trop peu connue dans la première moitié du 18ème siècle pour que les travaux ultérieurs de Bernoulli et d'Euler aboutissent à de meilleurs résultats.

C'est Laplace qui, en 1774, entreprit de traiter le problème sous son aspect purement dynamique. Dans le quatrième livre de son "Traité de Mécanique Céleste" (1799), il réussit à déterminer complètement les oscillations d'un océan recouvrant entièrement la Terre, lorsque la profondeur suit des lois simples et montre comment on peut combiner la théorie avec les observations pour tenir compte de toutes les circonstances accessoires dont l'influence ne peut être a priori soumise à l'analyse.

La théorie dynamique, qui est à la base de tous les développements ultérieurs, s'appuie sur deux principes essentiels : celui des oscillations forcées suivant lequel les molécules des océans, soumises à une force rigoureusement périodique exécutent des oscillations de même période et celui de la superposition des petits mouvements qui attribue comme mouvement total à un système soumis à de très petites forces, la somme des mouvements partiels élémentaires périodiques; il correspond à chacun d'eux une marée partielle de même période et la somme de ces oscillations représente la marée.

L'application de ces principes permet à Laplace d'établir une expression de la dénivellation en fonction de l'angle horaire, de la déclinaison et de la distance de l'astre. Cette formule dite formule de Laplace admet que les amplitudes sont proportionnelles à leur valeur théorique et que les marées correspondantes sont déphasées par rapport à la marée théorique. Ces éléments, déphasages et facteurs de proportionnalité, dépendent des conditions hydrauliques, donc de la forme des continents et de la profondeur des océans ; on peut les déterminer expérimentalement dans chaque port à l'aide des observations de marée.

Au début du 19ème siècle, les Anglais Lubboch, Whewell et Airy apportèrent d'importantes contributions à l'étude des marées, tant en améliorant les méthodes d'utilisation des observations qu'en rassemblant et discutant un nombre considérable de résultats pour le calcul des tables de marée et pour l'étude de la propagation des marées. La formule de Laplace est appliquée au calcul des pleines et basses mers à Brest par l'ingénieur hydrographe Chazallon qui inaugure, en 1839, la publication de l'Annuaire des marées des côtes de France.

Mais la multiplication des observations montre que la formule de Laplace s'applique mal à la prédiction des marées à forte inégalité diurne. C'est l'Anglais W. Thomson (Lord Kelvin) qui ouvre une voie nouvelle en 1868 par l'introduction de l'analyse harmonique dans le traitement des observations.

Il décompose le potentiel de la force génératrice des marées en une somme de termes périodiques et il admet qu'à chacun d'eux correspond, dans la hauteur de la marée, un terme de même période dont l'amplitude et la phase sont fournies par l'analyse harmonique des courbes de marée. Il invente une machine mécanique le "Tide predictor" pour faire la somme de tous ces termes et prédire les marées. Le problème de la prédiction des marées à partir d'observations antérieures est résolu. La méthode d'analyse harmonique est perfectionnée par les travaux de Darwin, puis de Doodson qui établit en 1921 un développement plus complet du potentiel générateur.

L'explication théorique du phénomène progresse lentement. A la fin du 19ème siècle, Harris aux Etats-Unis et Hough en Angleterre reprennent l'étude de la question et introduisent le principe de résonance pour tenir compte de la configuration des océans.

En France, H. Poincaré indique les méthodes de calcul au moyen desquelles on peut obtenir, théoriquement, la solution du problème des marées sur un globe où les océans sont séparés par des continents. Le calcul effectif des solutions analytiques reste néanmoins ardu et les modèles de propagation de la marée réelle sont basés pratiquement sur des considérations empiriques et sur l'analyse des observations disponibles, essentiellement le long des côtes. Citons à titre d'exemple les travaux de l'Allemand Dietrich (1944), repris par le Français Villain (1952) .

#### 7.4 - Les modèles numériques

L'avènement des ordinateurs, et l'introduction des méthodes numériques à partir des travaux de l'Allemand Hansen (1949), ont permis de nouvelles tentatives de résolution des équations de Laplace pour les océans réels. Les désaccords entre les différents modèles obtenus comme ceux de Bogdanov et Magarik (1967), Pekeris et Accad (1969), Hendershott (1972) et Zahel (1977) montrent la nécessité d'améliorer notre connaissance de la bathymétrie des océans et de prendre en compte des effets jusque là négligés (interaction avec les marées terrestres, par exemple), qui compliquent la solution du problème.

Des problèmes physiques majeurs, associés à la dissipation de l'énergie des marées, restent posés. Le recours aux observations, surtout au large, est nécessaire pour le contrôle et l'étalonnage des modèles. A cet égard, l'apparition des techniques spatiales semble prometteuse .

## C H A P I T R E II

---

### Observation de la marée

#### 1. Nécessité des observations de marée

Les conditions théoriques et les modèles qui en découlent sont actuellement insuffisants pour permettre la détermination précise a priori de la marée en un point. La vérification de la validité des hypothèses faites aussi bien que l'établissement de formules de prédiction nécessitent l'observation préalable et continue du phénomène pendant une certaine période. Les études récentes exigent en particulier des observations au large, mettant en oeuvre des technologies coûteuses et complexes.

Mais l'observation de la marée n'a pas pour seul but d'améliorer notre compréhension du phénomène. En effet, si d'une part on observe de manière continue la hauteur de l'eau par rapport à une surface de référence conventionnelle et si d'autre part on mesure les profondeurs ou les altitudes par rapport à la surface de la mer, en notant l'heure de la mesure, on peut ramener profondeurs et altitudes au niveau de référence. Même dans les régions où la marée est peu importante (mers fermées, lacs) ou bien parfaitement connue et prédictible, l'observation de la hauteur d'eau pendant les travaux de sondage ou de topographie permet de s'affranchir des perturbations accidentelles qui peuvent affecter à tout instant le niveau de la surface de l'eau. Ces observations peuvent toutefois être limitées, dans ce cas, aux périodes de travaux. La limite de précision des techniques de mesure de la profondeur permet de se contenter en général d'observations à la côte ou par petits fonds.

Signalons enfin que les observations de hauteur d'eau peuvent répondre à d'autres nécessités pratiques : elles permettent d'assurer en temps réel la sécurité de la navigation dans certains ports ou chenaux ou constituent la base de réseaux d'alerte destinés à détecter des phénomènes catastrophiques (ondes de tempête, tsunamis) .

Les méthodes d'observation ont suivi le développement des besoins et les progrès de la technologie depuis l'observation ponctuelle à l'échelle jusqu'à l'altimétrie par satellite.

## 2 - Les observatoires ponctuels

### 2.1. Echelles de marée

Le type d'échelle le plus simple et le plus courant est la mire graduée, planche en chêne ou en sapin de 20 cm de large et de 2 à 4 cm d'épaisseur dont la longueur ne dépassant généralement pas 6 mètres dépend des conditions de marée et d'installation. Cependant on peut être amené à utiliser des pieux gradués à section carrée ou hexagonale lorsque l'échelle doit être lue dans des azimuts divers, par exemple quand l'observateur est amené à se déplacer par rapport à l'échelle lorsque la mer monte ou descend.

Fig. 1



La graduation est constituée d'ordinaire par des carreaux décimétriques rouges, noirs et blancs disposés en damiers et alternés tous les 50 centimètres. Les mètres ronds doivent être indiqués par des chiffres bien lisibles. La lecture se fait à vue en interpolant dans le carreau atteint par le niveau de l'eau. Dans certains ports, les services maritimes utilisent des échelles en bronze ou en porcelaine graduées de 2 en 2 centimètres, mais le gain de précision est faible en raison de la présence fréquente de clapotis et du risque d'erreur de carreau.

L'observation de la marée consiste alors à noter sur des carnets spéciaux la hauteur de l'eau lue sur l'échelle à des intervalles de temps réguliers, tous les quarts d'heure généralement.

Les échelles de marée présentent les avantages suivants : simplicité d'emploi, faible prix et facilité d'installation. Par contre, l'obtention d'observations continues soulève des problèmes de main d'oeuvre souvent difficiles à résoudre. Le clapotis qui peut régner aux abords de l'échelle est susceptible, en outre, de rendre les lectures difficiles et imprécises.

Le choix de l'emplacement de l'échelle est un problème essentiel.

En premier lieu, il faut que la marée puisse être observée complètement ; par conséquent l'emplacement devra être choisi de manière à maintenir le pied de l'échelle constamment dans l'eau et ainsi permettre l'observation des plus grandes basses mers.

Il faut ensuite tenir compte des circonstances locales qui peuvent entraver la libre propagation de la marée. Par exemple l'existence en aval de l'échelle de dénivellations de terrain, ou de bancs à l'entrée de baies abritées, perturbe l'écoulement naturel des eaux de sorte que la courbe de marée observée est souvent déformée, parfois même tronquée, au voisinage de la basse-mer (plus fortement en vive-eau lorsque la quantité d'eau accumulée est plus grande).

Ces précautions sont d'autant plus nécessaires que les basses mers de vive-eau sont importantes pour la connaissance de la marée et du niveau de référence des sondages ainsi que pour la détermination précise des cotes des hauts-fonds dangereux pour la navigation.

L'échelle devra être néanmoins placée dans un endroit aussi abrité que possible de la houle et du clapotis qui rendent les lectures difficiles et incertaines ; mais, il ne faut pas oublier qu'un abri trop parfait pourrait introduire un amortissement se manifestant par une diminution d'amplitude et un léger déphasage.

Lorsqu'on installe l'échelle, il n'y a pas lieu de se préoccuper spécialement de mettre le zéro de la graduation en coïncidence avec le niveau de référence des cartes (d'ailleurs souvent inconnu à ce moment). Une opération de nivellement permettra de déterminer la correction à apporter aux lectures faites sur l'échelle pour en déduire la hauteur d'eau au-dessus du niveau de référence.

Il ne faut jamais oublier que l'échelle doit pouvoir être lue par l'observateur de la manière la plus simple possible ; il y aura souvent intérêt à l'installer au voisinage d'un angle de quai, au pied d'un escalier, éventuellement sur une tourelle. On peut admettre à la rigueur que l'observateur relève les hauteurs d'eau à une certaine distance à l'aide de jumelles mais on ne devra envisager l'emploi d'une embarcation pour se rendre à l'échelle que dans des cas exceptionnels.

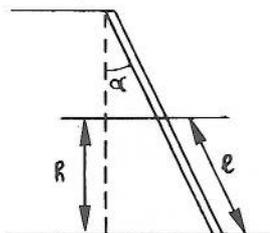


Fig. 2

Si on dispose à l'emplacement adopté d'un mur de quai, l'échelle y sera solidement fixée en ayant soin qu'elle soit bien verticale. Si le mur présente un certain fruit, l'échelle sera placée selon la ligne de plus grande pente ; on déterminera l'inclinaison  $\alpha$  par rapport à la verticale et on calculera un tableau donnant les corrections  $\Delta l$  à retrancher aux lectures  $l$  en utilisant la formule suivante :

$$\Delta l = l - h = l (1 - \cos \alpha)$$

Faute d'un mur de quai, on cherchera un rocher dont la base ne découvre jamais ; quelques scellements fixeront l'échelle aux parties les plus saillantes du massif et des haubans en fil de fer consolideront l'installation.

Si on ne dispose pas de points d'appui, on enfoncera dans le sol sous-marin, au-dessous du niveau des plus grandes basses-mers si possible, un ou plusieurs pieux de marée, lestés par des gueuses et solidement haubannés sur des grappins. On utilisera quelquefois un échafaudage en tubes métalliques sur lequel on appuiera et fixera l'échelle. Si le sol est constitué de vase ou sable, il est nécessaire de vérifier par de fréquents nivellements que l'échelle ne s'enfoncé pas peu à peu.

La pose des échelles de marée doit avoir lieu aux environs des basses-mers de vive-eau si possible, afin que, grâce à la faible hauteur d'eau à ce moment, on puisse se rendre compte au mieux des conditions locales de l'emplacement et réaliser la meilleure fixation possible de l'échelle. Il sera cependant souvent utile de recourir à l'aide d'une embarcation.

Aussitôt l'installation terminée, les échelles doivent être très soigneusement nivelées par rapport à des repères bien définis du voisinage (au minimum trois) rattachés, le cas échéant, au nivellement général du pays. On évitera les repères sujets à caution ou modifications (sommets de roche, marches d'escalier). Cette opération est essentielle car les échelles sont fragiles et peuvent être facilement avariées ou détruites par le mauvais temps ou des chocs d'embarcations. Il faut que toute échelle installée ultérieurement puisse être aisément rattachée au niveau de référence provisoire ou définitif.

Nous avons jusqu'à présent admis implicitement que le marnage était tel que l'on pût se contenter d'une échelle unique permettant de relever les hauteurs d'eau depuis les plus basses basses-mers jusqu'aux plus hautes pleines-mers.

En fait cela n'est possible que sur les côtes où le marnage n'est pas trop important, ne dépassant pas 5 à 6 mètres : c'est le cas le plus général. Mais, sur le littoral de la Bretagne ou en Manche, les marnages à attendre sont parfois de 10 à 15 mètres. Il est difficile alors de manipuler et d'installer des échelles de plus de 7 à 8 mètres qui doivent être d'autant plus épaisses qu'elles sont plus longues. Il est parfois possible d'en installer dans des ports, mais souvent, lorsque le marnage est grand, le pied des jetées assèche et l'échelle n'est utilisable qu'au-dessus d'une certaine hauteur d'eau. D'autre part, en admettant qu'on ait installé sur un pieu ou un rocher une grande échelle verticale, la mer montante tend à écarter l'observateur de l'échelle, au point d'interdire les lectures.

.../...

Lorsque le marnage est grand, on est amené à utiliser plusieurs échelles de marée pour le même lieu, souvent deux, parfois trois, exceptionnellement quatre. Ces échelles sont installées selon les critères et méthodes indiqués plus haut ; par exemple une échelle de pleine mer le long d'un quai ou d'une jetée, une échelle de mi-marée appuyée contre un massif rocheux et enfin une échelle (ou pieu) de basse-mer plantée dans le sol.

De nombreuses précautions sont à prendre pour assurer un bon fonctionnement de l'observation. En premier lieu, les échelles doivent avoir un certain recouvrement en hauteur de manière qu'il n'y ait pas de manques dans les relevés ; il faut ensuite qu'elles soient suffisamment voisines et accessibles pour que l'observateur puisse aller de l'une à l'autre dans l'intervalle de deux observations ; en outre, l'échelle de basse-mer peut être couverte à pleine mer de plusieurs mètres d'eau ; elle constitue donc un danger pour les bateaux circulant dans les parages, qui devra être signalé par un pavillon ne couvrant jamais ou par une bouée.

Indépendamment du rattachement par nivellement géométrique des échelles entre elles et aux repères, on effectuera le plus souvent possible des lectures simultanées aux échelles lorsque le niveau de l'eau sera dans la zone de recouvrement. Ce nivellement, appelé nivellement hydrographique, est particulièrement nécessaire pour les échelles de basse-mer qui, exposées aux vagues et aux courants, peuvent être plus ou moins déchaussées avant d'être arrachées complètement ; on s'assure ainsi par ces lectures simultanées contre le risque de lectures fausses et on vérifie la fixité de l'échelle. D'une manière générale, on appelle nivellement hydrographique toute opération de nivellement utilisant la surface de la mer comme plan horizontal au lieu du plan décrit par l'axe optique d'une lunette nivelée. Le nivellement hydrographique est généralement suffisant ; cependant il convient d'être prudent, car il ne conduit à des résultats précis que pour des portées relativement faibles et en l'absence de courant entre les deux points que l'on rattache.

Pour que les observations de marée faites aux échelles soient satisfaisantes, il faut d'une part que les échelles soient bien faites, bien installées, bien entretenues, et d'autre part que l'observateur soit consciencieux et ait l'initiative de signaler tout ce qui lui paraît douteux ou anormal en l'inscrivant avec l'indication de l'heure sur le carnet d'observations.

Outre le carnet, l'observateur doit recevoir une montre, des jumelles, un crayon et une gomme. Le problème de la remise de la montre à l'heure, contrôle quotidien si possible, est facile à résoudre de nos jours : la plupart des services publics, PTT principalement, sont susceptibles de fournir l'heure à la minute près. A chaque occasion possible, notamment lors du changement de carnet d'observations, ou d'observateur, on vérifiera la montre par rapport à un garde-temps et on notera l'écart éventuel sur le carnet.

Les jumelles sont indispensables lorsque les échelles sont d'accès difficile mais, même pour des échelles relativement peu éloignées, l'emploi des jumelles permet d'apprécier beaucoup mieux le centimètre dans les carreaux décimétriques surtout en présence d'agitation de la surface de l'eau. L'observateur doit être entraîné à moyenner à vue le clapotis et doit en outre mentionner l'amplitude du phénomène sur le carnet.

Enfin, il faut soigneusement veiller à faire porter sur le carnet les indications utiles à l'exploitation des observations, notamment la date, l'identification des échelles utilisées, ainsi que le système horaire employé (sous la forme UT + ..). Le report graphique des observations peut permettre de détecter et de corriger des erreurs grossières de lecture.

## 2.2. Marégraphes

L'emploi de marégraphes permet l'élimination à peu près complète de la main d'oeuvre pour l'observation proprement dite. Toutefois, on n'obtient généralement un fonctionnement satisfaisant qu'au prix d'une installation soignée et d'une surveillance régulière.

Le développement industriel a mis sur le marché de nombreux types de marégraphes. Les uns peuvent être installés à terre et utilisent soit le déplacement vertical d'un flotteur, soit les variations de pression hydrostatique, soit encore la fermeture de contacts électriques par l'eau ; les autres sont dits "plongeurs" et peuvent être immergés dans la mer : ces derniers constituent un progrès particulièrement important puisqu'ils permettent d'observer la marée en des points où l'installation d'échelles ou de puits est impossible ; les marégraphes plongeurs sont généralement manométriques mais on a songé aussi à utiliser la réflexion d'ondes ultra-sonores sur la surface de la mer.

Les emplacements à choisir pour les marégraphes doivent en principe satisfaire aux mêmes conditions générales que pour les échelles ; toutefois les appareils peuvent être munis de dispositifs amortissant les oscillations de très courte période (clapotis). D'un autre côté, la protection et la surveillance des installations, la réalisation de puits pour les marégraphes à flotteurs, imposent souvent des servitudes supplémentaires.

Ajoutons enfin que, dans les ports, les indications des marégraphes sont souvent transmises à distance à divers services, à l'aide de systèmes généralement électriques, actionnant des indicateurs analogiques ou digitaux.

### 2.2.1. Marégraphes à flotteurs (figure 3)

Ces appareils sont actuellement les seuls qui mesurent directement la hauteur du niveau de l'eau, c'est-à-dire la grandeur physique recherchée. Leur emploi devra donc être préféré dans la mesure du possible.

Les marégraphes à flotteurs comportent généralement un flotteur disposé dans un puits vertical en communication avec la mer et fixé à l'extrémité d'un fil métallique s'enroulant sur un tambour T. Un second tambour T' de diamètre inférieur est monté sur le même axe et est garni d'un fil auquel est suspendu un contrepoids assurant la tension du fil du flotteur ; le contrepoids se déplace généralement dans le puits mais sa course est beaucoup plus faible que

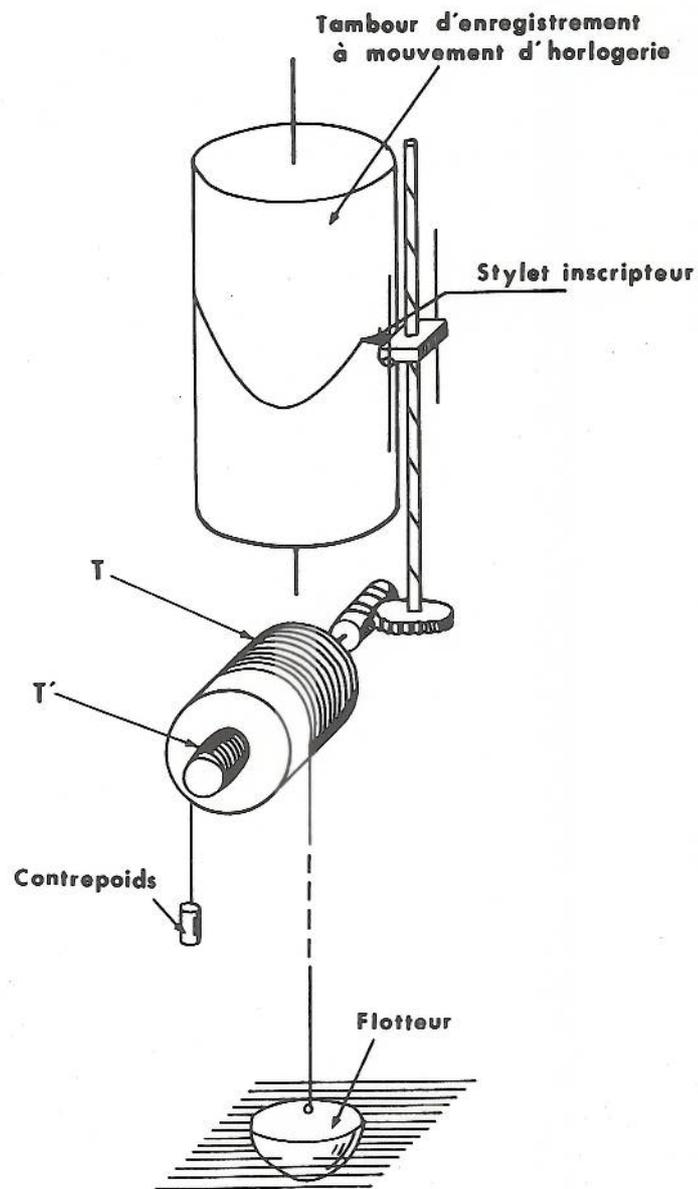


FIGURE 3

celle du flotteur en raison de l'inégalité des diamètres des tambours ; il serait d'ailleurs facile, si le contrepoids devait gêner le flotteur dans le puits, de donner au contrepoids une course extérieure à l'aide de poulies de renvoi. Sur certains appareils, le contrepoids est remplacé par un système de ressorts.

Les flotteurs sont souvent en cuivre. Dans les marégraphes fixes (ports) on utilise des flotteurs lenticulaires de grand diamètre de façon à vaincre l'inertie du système et les frottements pour la plus faible dénivellation possible, mais il faut alors des puits larges et encombrants.

Pour les tubes des marégraphes portatifs employés dans les missions hydrographiques, on a recours à des flotteurs oblongs. Le fil de suspension du flotteur doit être souple, inoxydable et inextensible.

Dans les installations fixes, le puits est en maçonnerie et communique avec la mer par un canal qui doit être situé au-dessous du niveau des plus basses mers. Dans certaines installations, le puits est creusé dans le rivage sans communication avec la mer à la partie inférieure ; le remplissage et l'équilibrage des niveaux se fait alors par un siphon. Il existe enfin, pour des marégraphes portatifs, des puits constitués par un ou plusieurs tubes de 10 à 15 cm de diamètre assemblés au-dessous du marégraphe et fermés à la partie inférieure par une tôle percée de un ou plusieurs trous.

Le rôle du puits est d'assurer l'amortissement des oscillations de très courte période (houle et clapotis) tout en évitant une réduction d'amplitude ou un déphasage de la marée proprement dite ou des seiches. Un paramètre essentiel est le rapport de la section des orifices de communication avec la mer à celle du puits. Ce rapport doit être suffisamment petit, (1/100 par exemple) sans être inférieur à 1/500. La longueur du canal de communication et sa profondeur sont deux autres paramètres importants.

L'égalité des niveaux intérieurs et extérieurs peut être perturbée par divers phénomènes : bouchage progressif du canal ou des orifices de communication par des dépôts de vase, coquillages, algues, etc... ; écart entre les densités moyennes de l'eau à l'intérieur et à l'extérieur (observatoire d'estuaire) ; effets dynamiques d'écoulement dans le canal ou autour du puits ; détérioration du puits (apparition de trous ou fissures).

Le déplacement du flotteur peut être enregistré en continu (enregistreur analogique) ou à intervalles réguliers (enregistreur digital). Les premiers marégraphes, construits en France vers 1842 à l'initiative de l'Ingénieur Hydrographe CHAZALLON, appartiennent à la première catégorie qui est toujours utilisée.

La rotation de l'axe des tambours sous l'effet du déplacement vertical du flotteur provoque, par l'intermédiaire d'un mécanisme (vis sans fin, crémaillère etc.), le déplacement rectiligne d'un chariot portant un style à une vitesse qui est dans un rapport simple avec la vitesse ascensionnelle du flotteur. Le style appuie sur une feuille de papier entraînée par un mouvement d'horlogerie et trace ainsi la courbe de marée.

Suivant les appareils, le cylindre d'enregistrement est à axe horizontal ou vertical. Autrefois l'entraînement était assuré par une horloge à poids ; actuellement on utilise un mouvement d'horlogerie à ressort ou électrique ; le remontage se fait généralement toutes les semaines et il y a intérêt à l'effectuer à intervalles constants. Le cylindre est recouvert d'une feuille de papier portant une graduation en temps selon les abscisses et en hauteurs selon les ordonnées. Dans les services maritimes, on se contente souvent d'un tour du cylindre par semaine mais, pour les besoins de l'hydrographie, il est préférable que le cylindre fasse un tour par jour. Si l'on ne change la feuille que toutes les semaines, 7 courbes journalières sont superposées, ce qui présente peu d'inconvénient puisqu'en général la marée se décale un peu d'un jour à l'autre.

Exemple : Marégraphe OTT R16

C'est un marégraphe à flotteur de conception classique (Fig. 4 et 5). Le tambour vertical (1) (circonférence 384 mm, hauteur 250 mm) est entraîné par un robuste mouvement d'horlogerie (2) à remontage manuel ou électrique. L'entraînement du dispositif traceur (3) est assuré par le flotteur (4) (diamètre 80 mm) aidé de son contrepoids (5) (poids 0,12 kg), par l'intermédiaire de poulies (6) et d'engrenages (7) assurant un rapport de transmission adéquat.

Ce marégraphe peut être équipé d'un compteur (8) à affichage digital direct de la hauteur.

Le tambour et tous les axes et poulies sont montés sur billes. La tête d'enregistrement est montée sur rouleaux ; elle comporte une plume capillaire et un réservoir d'encre et est équilibrée par un contrepoids (9).

Les caractéristiques principales de l'appareil sont les suivantes :

marnage maximum mesurable : 0,25 - 0,5 - 1,25 - 2,5 - 5,0 - 6,25 - 12,5 ou 25,0 m soit une échelle de réduction de 1/1, 1/2<sup>e</sup>, 1/5<sup>e</sup>, 1/10<sup>e</sup>, 1/20<sup>e</sup>, 1/25<sup>e</sup>, 1/50<sup>e</sup> ou 1/100<sup>e</sup>

durée de révolution du tambour : 32 mn ; 3,2 - 6,4 - 12,8 - 24 ou 32 heures ; 8, 16, 32 ou 96 jours soit une avance du papier de 720 - 120 - 60 - 30 - 16 - 12 - 2 - 1 - 0,5 mm/h ou 4 mm/jour.

autonomie du mouvement : 32 jours (manuel). Il est recommandé de remonter le mouvement à chaque changement de feuille.

précision : les écarts en hauteur dépendent de l'échelle de réduction.

Echelle	1/1 <sup>e</sup>	1/2 <sup>e</sup>	1/5 <sup>e</sup>	1/10 <sup>e</sup>	1/20 <sup>e</sup>
précision sur l'enregistrement	2,4 mm	1,6 mm	1,5 mm	0,9 mm	0,6 mm

Ce marégraphe peut être mis en oeuvre jusqu'à des profondeurs d'environ 50 m.

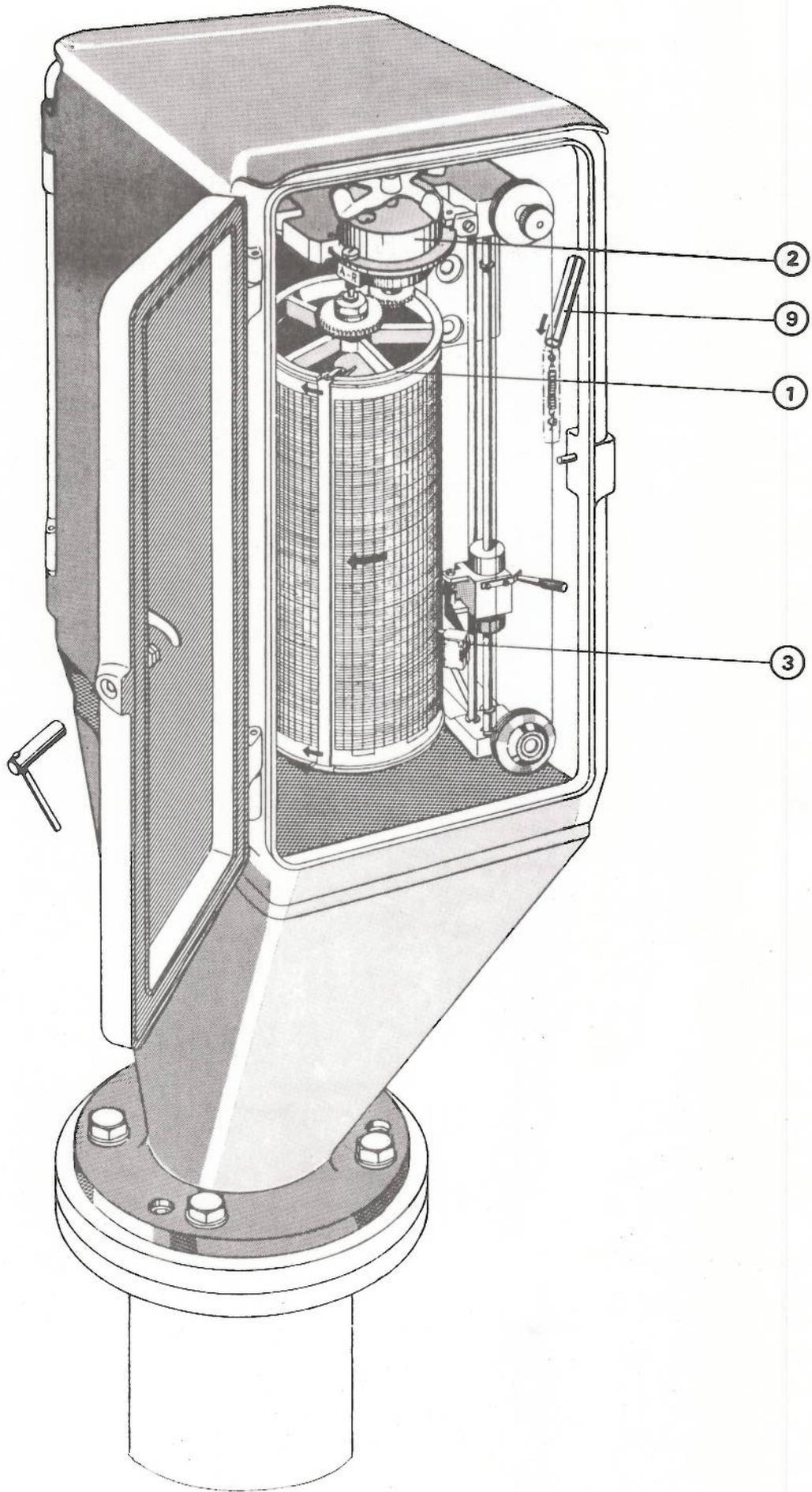


FIGURE 4

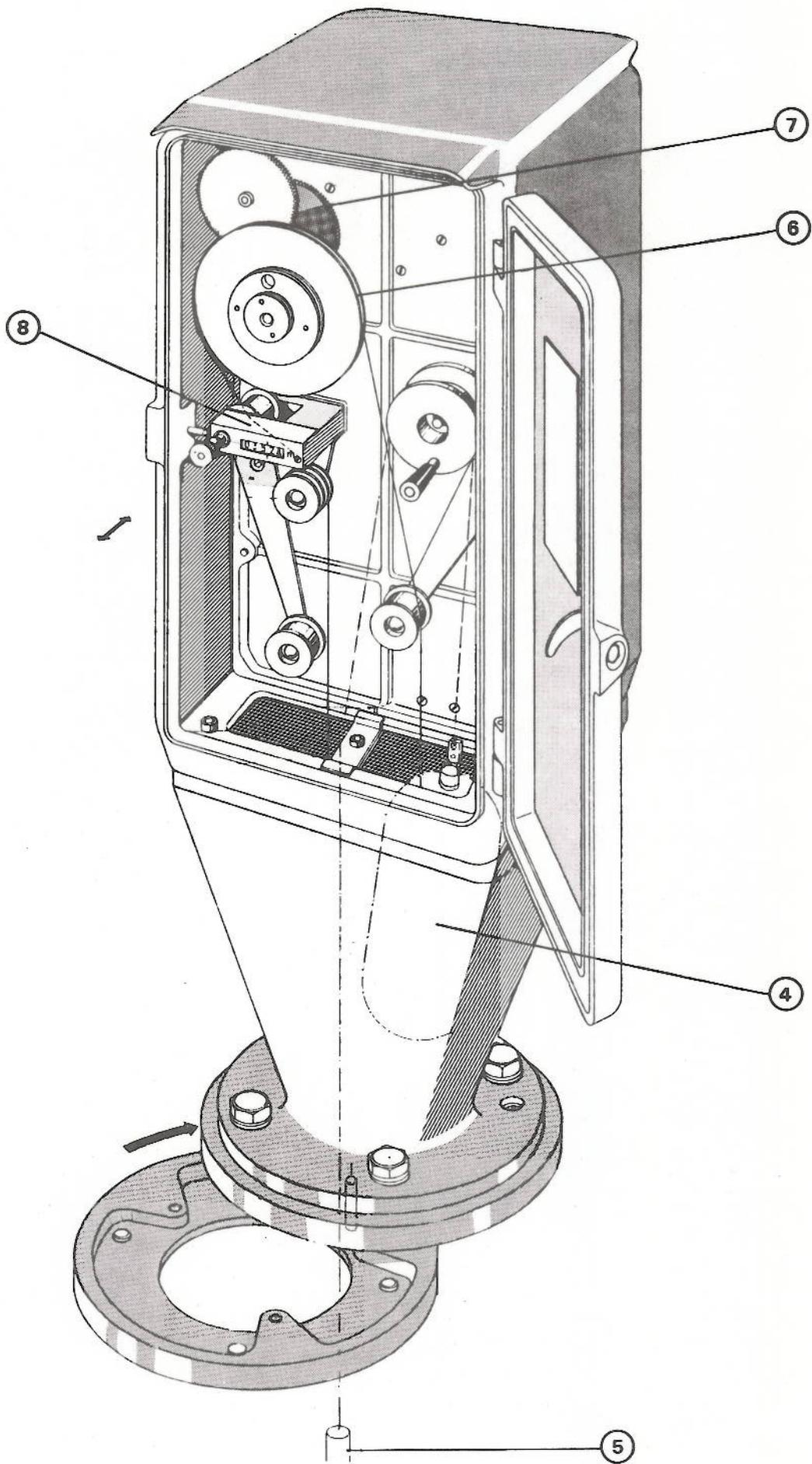


FIGURE 5

Il paraît tentant, pour améliorer la qualité des enregistrements et simplifier la saisie et le traitement des observations d'avoir recours à des enregistreurs digitaux. Le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine a ainsi employé, vers la fin des années 1960 un marégraphe OTT R20, variante du R16 avec enregistrement digital sur ruban perforé. Ce matériel a été abandonné en raison de son mauvais fonctionnement. Compte tenu des progrès technologiques, les enregistrements digitaux devraient cependant être de plus en plus utilisés dans les années qui viennent.

Un marégraphe à flotteur transforme une mesure de hauteur en mesure d'angle. Il est donc facile, à l'aide d'un codeur angulaire associé à une horloge très stable, de mesurer la hauteur de l'eau à intervalles réguliers. L'effort devra porter sur la fiabilité et l'autonomie de l'appareil, qui peut, d'ailleurs, être doublé d'un enregistreur analogique destiné au contrôle et à la continuation de la mesure en cas d'interruption du prélèvement digital.

Le choix de la cadence de prélèvement est à considérer avec attention, en fonction en particulier du filtrage effectué par le puits, pour éviter tout phénomène d'aliasing. Le lissage des irrégularités à courte période, qui est effectué manuellement sur les enregistrements analogiques, peut être envisagé de deux manières :

- cadence de prélèvement rapide (à intervalles de quelques secondes) et filtrage numérique a posteriori. Il faut disposer d'un enregistreur à grande capacité de mémoire ;
- filtrage numérique avant mise en mémoire. Le filtrage retenu doit être adapté aux traitements ultérieurs des observations.

Dans les deux cas, une consommation plus importante d'énergie est à prévoir.

### 2.2.2 - Marégraphe à pression

La mesure directe de la hauteur d'eau ou de ses variations semble impossible au large. Parmi les méthodes indirectes, la mesure de pression semble la plus commode car peu sensible, contrairement aux mesures acoustiques par exemple, aux variations usuelles de densité de l'eau de mer et théoriquement aisément transformable en hauteur. Du fait, en particulier, de la faiblesse des mouvements verticaux, la pression dans les océans est essentiellement hydrostatique. La pression mesurée intègre toutefois aussi les effets de la pression atmosphérique et les effets dynamiques d'écoulement autour du capteur. La connaissance de la densité moyenne sur la colonne d'eau est en outre indispensable pour transformer la mesure de pression, réduite des effets atmosphériques et dynamiques, en mesure de hauteur. Pour les mesures par petits fonds, on se contente en général de la densité de surface ; pour les mesures par grands fonds (supérieurs à 200 m), on préfère le plus souvent conserver la pression comme paramètre principal.

Le capteur de pression peut être placé soit au fond soit à la surface. Dans ce dernier cas, la pression doit être transmise depuis le fond, par un tube d'air par exemple (marégraphe à fuite). Dans le cas d'un capteur sur le fond, l'enregistreur peut être placé au fond (marégraphe dits "plongeurs") ou en surface. Un système de télétransmission est indispensable pour la réduction des sondes en temps réel.

A proximité immédiate des côtes, les marégraphes à pression ne présentent plus comme avantage que d'éviter l'installation préalable d'un puits, qui n'est pas toujours aisée hors des infrastructures portuaires. Dans ce cas, les marégraphes les plus utilisés sont les marégraphes à fuite.

### 1) - Marégraphes à fuite

L'air est maintenu dans un tuyau immergé avec un débit suffisant pour provoquer une fuite constante. Si cette fuite reste faible, la pression dans le tuyau est pratiquement égale à la pression de l'eau à son extrémité. Cette dernière comporte en général une chambre d'un diamètre plus grand que celui du tuyau, ce qui a pour effet de limiter l'influence de la houle ou du clapot. La pression dans le tuyau est mesurée par un manomètre.

Exemple : limnigraphe Neyrpic "Télimnip"

L'ensemble de mesure comporte (Fig. 6)

- Le Télimnip proprement dit composé de :

- un manomètre à mercure (1) auquel est appliquée la pression à mesurer. La cuve peut être équipée d'un filtre amortisseur (2) qui élimine les fluctuations rapides du niveau.

- un flotteur (3) qui suit les déplacements de la surface libre du mercure dans le manomètre. Il est suspendu à une crinelle (4) tendue par un contrepois (5).

- un jeu de poulies (6) et (7) entraîné en rotation par la crinelle (4) et qui déplace la plume (8).

- une table de déroulement (9) à remontage manuel ou électrique.

- une robinetterie de réglage avec visualisateur (10) pour régler le débit d'air injecté dans la prise de pression (11).

- L'alimentation en air comprimé (12)

- la prise de pression (11)

Le circuit pneumatique est schématisé sur la figure 7.

Les caractéristiques principales de l'appareil sont les suivantes :

- marnage maximum mesurable : 2,5 - 5 - 7,5 - 10 ou 15 m  
soit une échelle de réduction de  $1/10^e$ ,  $1/20^e$ ,  $1/30^e$ ,  $1/40^e$  ou  $1/60^e$

- vitesse de déroulement du diagramme : 2,5 - 5 ou 10 mm/heure (horloge à remontage manuel) ; 2,5 - 5, 10 ou 20 mm/heure (horloge à remontage électrique)

- autonomie du mouvement : 4 semaines (manuel) ; 4 à 6 mois (électrique)

- autonomie du diagramme : 32 semaines à 2,5 mm/heure

- précision : écarts en hauteur : de l'ordre de 2 % du marnage

écarts en temps : de l'ordre de 20 mn par mois

- distance maximum entre la prise de pression et l'appareil : 300 m

- vitesse de poursuite du niveau : 3,5 m à l'heure.

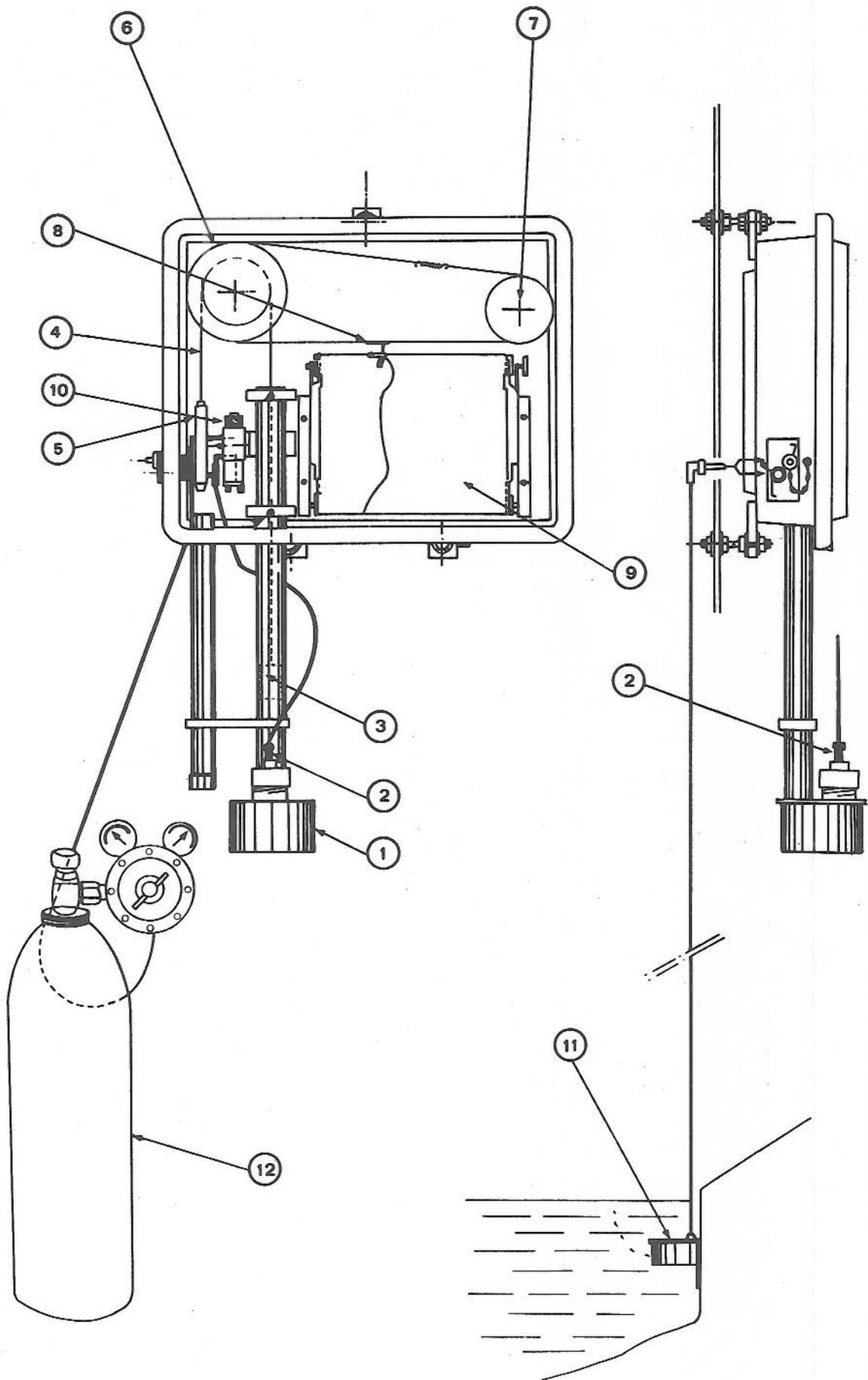


FIGURE 6

L'emploi de ce type d'appareil nécessite un certain nombre de précautions .

Pour que la pression mesurée soit reliée directement à la hauteur de la colonne d'eau au-dessus de l'orifice d'évacuation, le gaz doit s'échapper d'une façon continue, pour que l'eau ne pénètre pas dans le tube. Cette condition peut s'écrire sous la forme :

$$n_o > \frac{V}{vH_A} \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)_{\max}$$

avec  $n_o$  : nombre de bulles par unité de temps lorsque le capteur est à la pression atmosphérique  $P_A$

$V$  : volume total de gaz dans le système

$v$  : volume de chaque bulle

$\left( \frac{\partial h}{\partial t} \right)_{\max}$  : vitesse de variation maximum de la hauteur  $h$  de la colonne d'eau

$H_A$  : hauteur de la colonne d'eau équivalente à la pression atmosphérique  $P_A$

Le débit devra toutefois rester faible pour réduire les pertes de charge dans le tube et la consommation de gaz.

Si on suppose que le débit de gaz est proportionnel à la différence de pression à l'alimentation et à l'extrémité du tube, le nombre de bulles par unité de temps au cours de la mesure est :

$$n = n_o \frac{H_R - (H_A + h)}{H_R - H_A}$$

où  $H_R$  est la hauteur de la colonne d'eau équivalente à la pression d'alimentation  $P_R$  du système.

La pression mesurée par le manomètre différentiel s'écrit (voir figure 7) :

$$P_2 - P_A' = P_1 - P_A + (P_2 - P_1) + (P_A - P_A')$$

soit  $P_2 - P_A' = \rho_e gh + \Delta P$

où  $\rho_e$  est la densité de l'eau et  $\Delta P$  le terme correctif.

Le terme correctif  $\Delta P$  comprend :

- une partie statique correspondant à la dénivellation entre l'orifice du tube et le manomètre et entre le manomètre et la surface de l'eau :

$$\Delta_1 P = - \rho_g gH + \rho_{aA} g(H-h)$$

où  $\rho_g$  est la densité du gaz dans le tube,  $\rho_{aA}$  la densité de l'air à la pression atmosphérique et  $H$  l'altitude du manomètre au-dessus de l'orifice d'évacuation.

Si le gaz utilisé est de l'air et si les effets de variation de température sont négligeables, on a :

$$\rho_g = \rho_{aA} \frac{H_A + h}{H_A}$$

d'où  $\Delta_1 P = - \rho_{aA} (H/H_A + 1) gh$

Ce terme est équivalent à une réduction de la densité de l'eau employée pour la conversion des mesures de pression en mesures de hauteur. Pour  $H = 10$  m la correction est de 0.25 % sur les hauteurs .

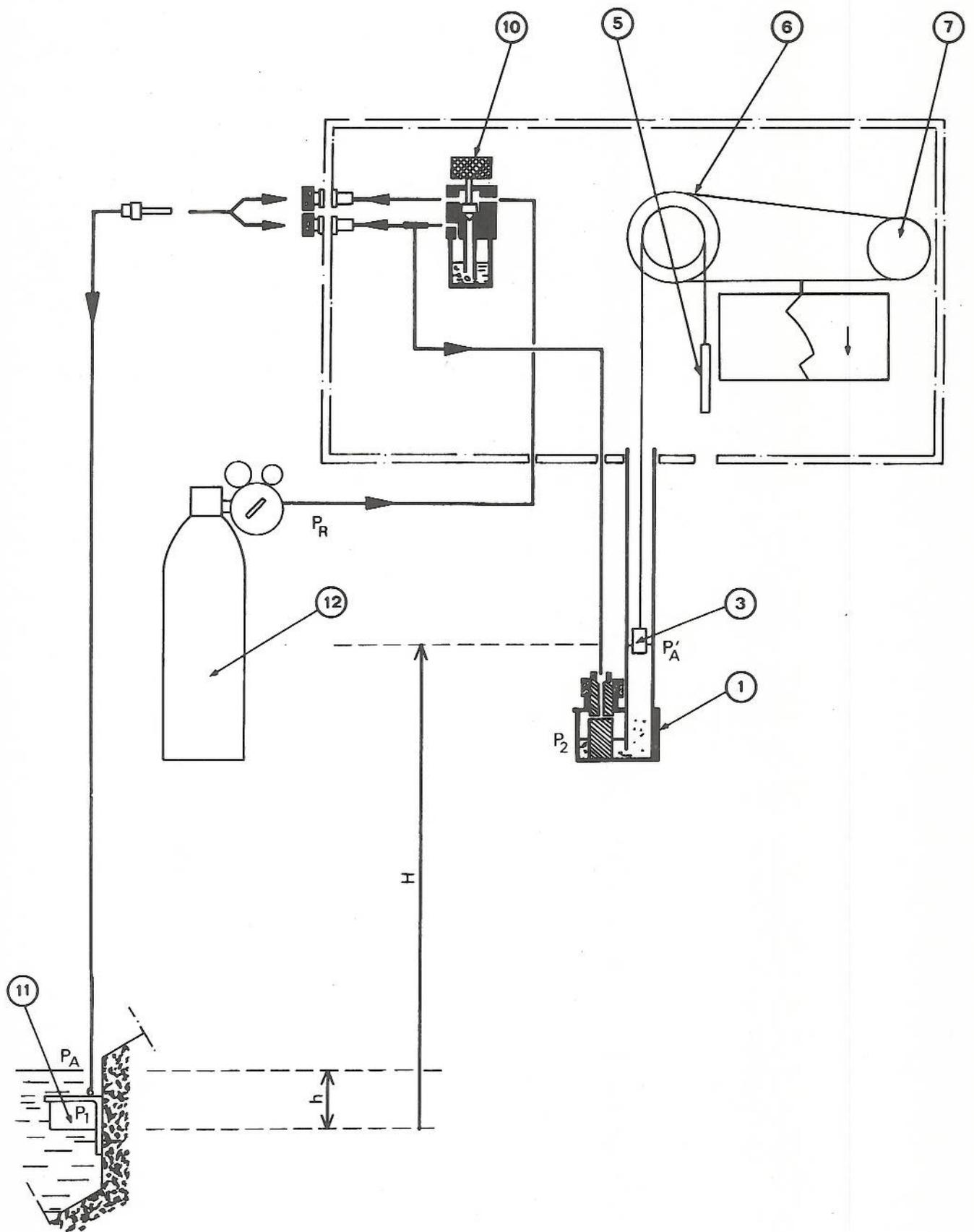


FIGURE 7

- une partie dynamique due au courant de gaz dans le tube et à l'ajustage des pressions dans le tube et dans le manomètre :

$$\Delta_2 P = \frac{8\mu l}{\pi a^4} \left[ \nu v - \frac{1}{P_2} \frac{\partial P_2}{\partial t} \left( V_2 + \frac{\pi a^2 l}{2} \right) \right] \quad (\text{écoulement laminaire})$$

avec :  $\mu$  : coefficient de viscosité dynamique du gaz  
 $a$  : rayon intérieur du tube  
 $l$  : longueur du tube  
 $V_2$  : volume de gaz dans le manomètre.

Ce terme augmente rapidement avec la longueur du tube : de l'ordre du cm pour un tube de 200 m, il dépasse 50 cm pour un tube de 1500 m .

La vitesse d'évacuation du gaz n'est pas suffisamment élevée pour que le système puisse suivre les variations de niveau dues aux vagues. Pour empêcher l'eau de pénétrer dans le tube au passage des crêtes, on munit généralement l'extrémité du tube d'une chambre tampon à large section. On montre que l'écart entre le niveau moyen réel (correspondant à l'absence de vagues) et le niveau correspondant au lissage de la courbe enregistrée vaut :

$$E = \frac{V s}{A P_0}$$

avec  $V$  : volume total de gaz (y compris le volume tampon)  
 $A$  : aire de la section transversale de la chambre tampon  
 $s$  : amplitude de la houle (exprimée en pression)  
 $P_0$  : pression instantanée au passage du creux de la vague.

Cet écart est de l'ordre de quelques pour cent de l'amplitude de la houle ; on aura intérêt pour le réduire, à choisir un rapport  $V/A$  faible. L'amplitude de la houle peut être déduite de l'épaisseur du tracé sur l'enregistrement, moyennant un étalonnage préalable.

## 2) - Marégraphes plongeurs

Le principe des capteurs de pression des marégraphes plongeurs est basé sur la déformation d'un élément sensible ou sur la modification d'une de ses propriétés sous l'influence des variations de pression. On peut classer les appareils en marégraphes de petit fond (jusqu'à 200 m) ou de grand fond (jusqu'à 6000 m), absolu ou différentiel selon que l'on mesure la pression absolue ou seulement ses variations par rapport à une valeur de référence voisine de la pression moyenne.

Les spécifications varient en fonction des besoins. Un marégraphe de grand fond absolu doit être très résistant et présenter une dynamique importante de façon à pouvoir résoudre 1 mm sur 5 km. Les systèmes différentiels par petit fond doivent eux être bien isolés thermiquement de sorte que les variations de la température extérieure ne modifient pas la pression de référence.

La grandeur mesurée n'est malheureusement jamais une fonction simple de la pression : elle dépend de la pression mais aussi de plusieurs autres paramètres tels que la température, le vieillissement, la tension d'alimentation, etc... Ces effets secondaires nécessitent des dispositions particulières, une calibration sérieuse des appareils et limitent les performances.

Pour éliminer le mieux possible les effets de température sur le capteur, on utilise souvent une méthode de compensation en doublant le capteur d'un capteur identique soumis uniquement aux variations de température. La comparaison des deux capteurs, qui peut être intégrée dans le système, permet de minimiser les erreurs dues à la température.

Le vieillissement du capteur se traduit par une dérive plus ou moins régulière et difficile à corriger. Cette dérive rend délicate, voire impossible, la détermination des variations à longue période de la pression.

Les enregistreurs des marégraphes plongeurs sont presque exclusivement digitaux. La numérisation de la mesure est le plus souvent effectuée par comptage du nombre de cycles d'un phénomène périodique pendant une durée donnée (généralement  $10^2$  à  $10^3$  secondes). La mesure de temps doit alors être soigneusement étudiée. Dans le cas typique d'une fréquence de 10 kHz et d'une sensibilité de 10 Hz/m, il faut rechercher une précision relative en temps supérieure à  $10^{-6}$  pour assurer une résolution de 1 mm .

De nombreux autres points nécessitent une attention particulière lors de la conception et de l'emploi de ces appareils, parmi lesquels :

- la consommation d'énergie et la capacité de stockage des mesures dont dépend l'autonomie du système ,
- le mode de restitution des mesures (transmission à distance ou non)
- le mécanisme de mouillage et de relevage dont la fiabilité conditionne la récupération de l'appareil, et des mesures s'il n'y a pas de possibilité de transmission à distance.

Plusieurs types d'appareils ont été développés depuis les années soixante. Les caractéristiques statiques et dynamiques des capteurs utilisés sont très variables et plus ou moins bien adaptées au type de mesures envisagé.

Citons par exemple :

- les tubes de Bourdon dont la déformation est mesurée par moyens optiques (déplacement d'un miroir)
- les diaphragmes dont la déformation est mesurée par des méthodes extensométriques (cordes vibrantes) ou électriques (jauges de contrainte)
- les capteurs à quartz où les variations de pression provoquent une variation de la fréquence de résonance du cristal .

Ces derniers sont sans doute les meilleurs capteurs à l'heure actuelle, mais leur coût est élevé.

#### Exemples

##### a) - Marégraphe SUBER SLS 13 (figure 8)

Cet appareil se présente sous la forme d'un cylindre métallique de 70 cm de haut et 20 cm de diamètre. Il pèse une trentaine de kilogrammes dans l'air et peut être utilisé par des profondeurs de 600 m . Son autonomie est de 16 à 128 jours selon la cadence d'acquisition des mesures. L'appareil est monté sur un châssis comportant un lest relié à un largueur acoustique. La flottabilité après largage du lest est assurée par des bouées.

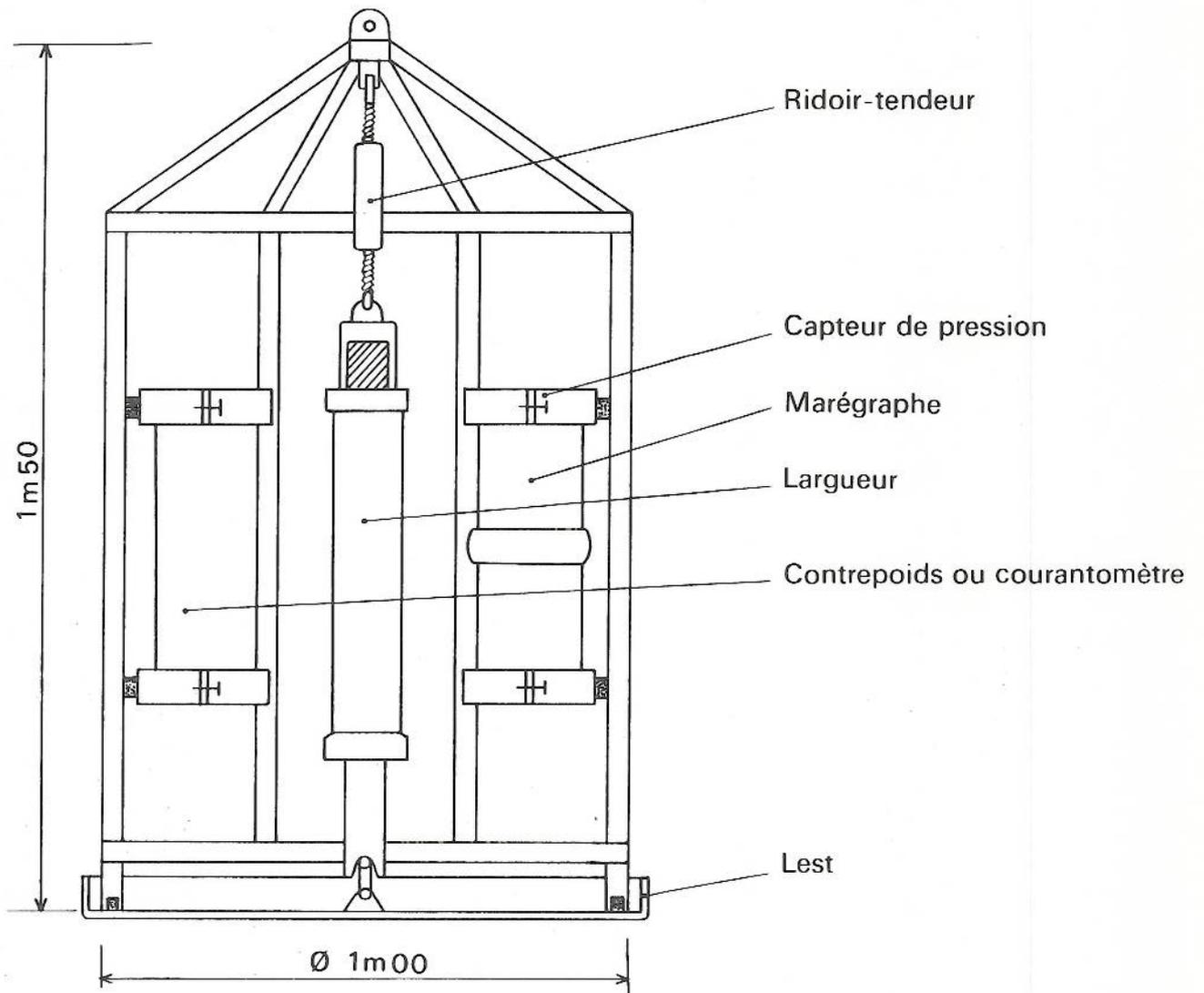


FIGURE 8

Le capteur utilisé est un capteur à quartz. Ce quartz pilote un oscillateur qui fournit une fréquence voisine de 40 kHz variant en sens inverse de la pression. Cette fréquence incrémente un compteur pendant 1, 2 ou 4 minutes, à intervalles réguliers de 60, 30, 15 ou 7.5 minutes, au choix de l'utilisateur. La base de temps est fournie par une horloge à quartz dont la précision est de l'ordre de  $10^{-5}$ . A la fin de chaque mesure, le contenu du compteur est transféré dans une mémoire morte (capacité 3072 mesures) accessible par simple connexion à une unité de traitement, sans démontage de l'appareil. L'alimentation est assurée par une pile au lithium d'autonomie deux à cinq ans.

Le traitement des mesures après prélèvement est le suivant :

Soit N le nombre de cycles de l'oscillateur pendant la période d'intégration T. La fréquence moyenne pendant cette période est

$$F = \frac{N}{T}$$

La courbe de réponse du capteur en pression est approchée par un développement limité :

$$P = A \left( 1 - \frac{F}{F_0} \right) - B \left( 1 - \frac{F}{F_0} \right)^2$$

où les paramètres A, B et  $F_0$  sont spécifiques à chaque capteur avec :

$$F_0 \approx 40 \text{ kHz}$$

$$A \approx 628 \text{ bars}$$

$$B \approx 342 \text{ bars}$$

Les effets thermiques sont négligeables, au moins pour les températures usuelles. La précision sur la mesure de pression est de l'ordre de 10 mbars.

b) - Marégraphe à grande profondeur du Centre Océanologique de Bretagne (COB) (figure 9)

Cet appareil, avec son lest, mesure environ 170 cm de haut et 70 cm de diamètre et pèse 350 kg dans l'air. Il peut être utilisé par des profondeurs de 6 000 m et a une autonomie de 6 mois (Fig. 9).

Il comporte un capteur à corde vibrante, mis au point vers 1964 par la société TELEMAR pour le compte de l'Association Française pour l'Etude des Grandes Profondeurs Océaniques (AFEGPO), associé à une électronique avec enregistrement sur cassette construite par le COB.

Le capteur est un cylindre d'acier inoxydable de 90 cm de long et 10 cm de diamètre avec, en atmosphère d'azote pressurisée, deux cordes d'acier inoxydable d'environ 10 cm de long. Chaque corde est placée dans le champ de deux électroaimants alimentés en courant sinusoïdal, l'un d'entretien, l'autre d'écoute.

La corde manométrique est reliée d'un côté à un châssis rigide et de l'autre à un diaphragme d'acier inoxydable de 2 mm d'épaisseur et de 5 cm de diamètre. Dans une première phase, une bouteille d'azote et un détendeur assurent l'égalité des pressions interne et externe. Une fois l'appareil en place, la fermeture d'une vanne isole l'intérieur du capteur. A partir de cet instant, les variations de pression extérieures, après filtrage mécanique des hautes fréquences, déforment le diaphragme d'où une légère variation de la tension du fil.

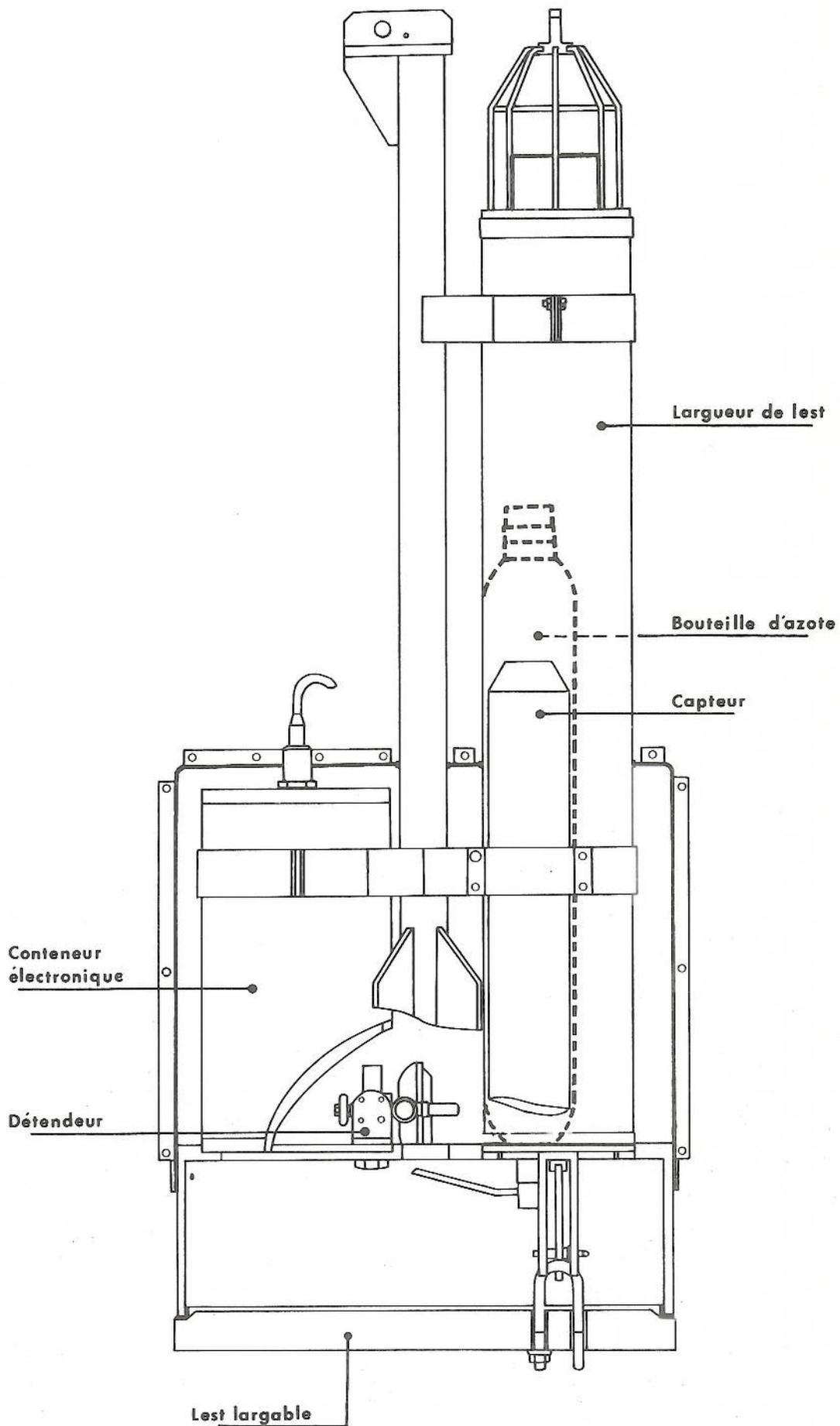


FIGURE 9

La fréquence de vibration N du fil est reliée à la variation de pression  $\Delta P$  par la loi :

$$\Delta P \sim K_P (N^2 - N_0^2)$$

La corde thermométrique permet de corriger la mesure des variations d'origine thermique de la pression de référence.

Sa tension, donc sa fréquence de vibration, est modifiée par la dilatation, linéaire, du châssis en invar sur lequel elle est fixée. La variation de température  $\Delta T$  et la fréquence N sont reliées par la loi :

$$\Delta T \sim K_T (N^2 - N_0^2)$$

Pour des fréquences de l'ordre de 800 Hz, les résolutions sont respectivement de - 0,3 m/Hz et de - 0,2° C/Hz.

Le capteur doit être préalablement étalonné dans toutes les gammes de profondeur utilisées.

La mesure de fréquence se fait sur un temps de comptage de 100 secondes avec une résolution de  $10^{-2}$  Hz assurant en principe une résolution de 0,3 cm en hauteur d'eau et de 2 m°C en température. La mesure est moyennée sur 5 minutes (12 mesures par heure). Les mesures de temps sont réalisées à partir d'un oscillateur à quartz dont la dérive est de 3 mn sur 6 mois.

Le châssis est associé à un largueur de lest acoustique permettant la remontée de l'appareil à flottabilité positive.

### 2.3 - Pratique des observations

On appelle "observatoire" un marégraphe ou une échelle ou un ensemble des deux suffisamment proches pour que la marée observée à chacun des appareils soit la même. Chaque observatoire doit donner lieu à l'établissement d'une fiche descriptive complète (dont il existe un modèle réglementaire au Service Hydrographique et Océanographique de la Marine).

Les observations, quel que soit l'instrument employé, ne donnent de bons résultats que si on effectue fréquemment (si possible une fois par jour) des contrôles en heure et en hauteur. Ces contrôles sont mentionnés sur une feuille ou un registre ad hoc en même temps qu'une indication sommaire sur la météo (force du vent) et sur l'état de la mer (amplitude de la houle ou du clapot) qui renseignera sur la qualité du contrôle. Dans le cas de mesures indirectes (marégraphes à pression), il faut procéder en plus à la calibration préalable de l'appareil et déterminer, lors des contrôles, les paramètres permettant de transformer les mesures en mesures de hauteur.

#### 2.3.1 - Marégraphes de surface

On appelle "zéro instrumental" (Ze ou Zm) le niveau atteint par l'eau lorsque la lecture sur l'instrument est zéro. Le calage en hauteur est destiné à déterminer la cote du zéro instrumental par rapport à un repère matériel qui peut être lui-même coté dans un système de nivellement (le Nivellement Général de la France, NGF par exemple) .

Les repères qui sont utilisés doivent permettre de définir durablement et avec précision le zéro instrumental et d'effectuer commodément les calages. Le niveau de référence des sondages et des cartes sera rattaché à ces repères. Il est nécessaire d'en installer plusieurs pour assurer la conservation ultérieure du niveau de référence (notons que les plus durables sont souvent les moins commodes).

Parmi les repères les plus durables, l'un d'eux est choisi comme "Repère fondamental de l'observatoire" (Rfm) et tous les calages sont ramenés à ce dernier. Bien entendu, tous les repères doivent être nivelés entre eux et situés en altitude dans le système local de nivellement, s'il existe. La reprise périodique du nivellement permet de s'assurer de la stabilité des repères.

Le calage en hauteur consiste à noter les lectures sur l'instrument et les hauteurs réelles lues simultanément sur une échelle située à proximité ou à l'aide d'une sonde électrique de contact. Pour un instrument à flotteur la détermination simultanée de la hauteur de l'eau dans le puits et à l'extérieur permet de vérifier que la communication avec la mer ne s'obstrue pas progressivement. Pour un marégraphe à fuite on peut aussi mesurer directement la profondeur de l'orifice d'évacuation.

En procédant à un calage en hauteur précis toutes les quinze minutes, par exemple, tout au long d'un cycle de marée et en portant sur un graphique l'écart (hauteur mesurée - hauteur réelle) en fonction de la hauteur réelle (diagramme de VAN CASTEELE), on pourra mettre en évidence un mauvais fonctionnement éventuel du système.

Le calage en heure résulte de la comparaison de lectures de l'heure faites simultanément sur un chronomètre (lui-même bien réglé) et sur le marégramme lorsque l'enregistrement est analogique ou sur le compteur horaire lorsque l'enregistrement est numérique. Le calage en heure est fait en même temps que le calage en hauteur. On n'oubliera pas d'indiquer le système horaire utilisé.

### 2.3.2 - Marégraphes immergés

Le contrôle direct des mesures en cours d'observation n'est en général plus possible.

On ne peut pas rattacher directement les hauteurs mesurées à un repère terrestre fixe. Deux cas sont à distinguer selon que les observations sont faites au voisinage d'une côte ou non .

Si les contrôles ont lieu au voisinage de la côte, on calcule d'abord les niveaux moyens au point d'observation et en un port de référence où la marée est également observée. La comparaison de ces deux grandeurs permet de déceler les dérives éventuelles de l'instrument (dues à des causes internes ou externes, telles que déplacement sur le fond ou enfouissement). La comparaison des pleines et basses mers est également possible mais elle est moins précise et de plus les caractéristiques de la marée peuvent varier même entre des points relativement voisins. On ajoute ensuite à chaque enregistrement une constante qui fasse coïncider les niveaux moyens au port de référence avec celui au point de mesure, éventuellement corrigé de la dérive. Cette procédure permet de rattacher des enregistrements successifs à un niveau unique, même si on a relevé entre temps le marégraphe (il est alors impossible de le remettre exactement au même point). Cette méthode suppose que le niveau moyen constitue sensiblement une surface de niveau entre le port de référence et le point d'observation.

Cette approximation n'est plus réaliste si on opère loin d'une côte. Le seul niveau de référence est alors le fond de la mer, à condition qu'il soit assez stable au point considéré. On peut, par exemple, effectuer un sondage au voisinage du point, sur une zone à peu près horizontale, au début et à la fin de chaque enregistrement au moins. Les enregistrements sont corrigés de manière à ce que les sondes réduites de la marée soient égales. On s'assurera en outre de la continuité de la courbe de marée lors des changements d'enregistrements. Cette méthode est peu précise mais le calage absolu est rarement nécessaire, la marée étant le plus souvent inférieure à la précision des sondages.

Le contrôle de l'horloge ne peut avoir lieu qu'avant et après la mesure. La fiabilité des bases de temps employées est telle que cela suffit en général. On peut, néanmoins, vérifier que le nombre de mesures est cohérent avec la durée d'observation et l'intervalle de prélèvement.

#### 2.4 - Dépouillement et vérification des enregistrements

Les opérations de dépouillement et de vérification des enregistrements de marée sont le préliminaire indispensable à toute analyse des observations. Ces opérations dépendent du type d'enregistreur utilisé.

Le traitement d'un enregistrement analogique comporte la numérisation de la courbe avec prise en compte des corrections déterminées lors des calages et conversion éventuelle en hauteur (dans le cas de mesures indirectes) puis la vérification des données en vue de la détection et de l'élimination des erreurs de dépouillement. Dans le cas d'un enregistrement numérique, on traite directement les valeurs discrètes brutes.

La numérisation des enregistrements analogiques est quelquefois effectuée manuellement, mais le plus souvent on a recours à une table de dépouillement associée à un calculateur. On se contente, sauf besoin particulier, de déterminer les hauteurs horaires. Les décalages en heure et hauteur sont déduits par interpolation entre les corrections déterminées lors des calages.

La vérification des données numériques est effectuée par contrôle visuel du report graphique de ces données (ou des résidus entre la série observée et une série prédite à partir d'une première analyse) ou automatiquement par comparaison entre chaque hauteur et une ou plusieurs hauteurs estimées au même instant. Les formules d'estimation les plus couramment utilisées sont les formules d'interpolation de Lagrange (interpolation polynomiale) appliquées à des hauteurs encadrant la hauteur examinée et les formules d'ajustement harmonique dans lesquelles on utilise un développement en série de Fourier limité à quelques termes (un à dix) représentant au mieux un groupe de hauteurs encadrant la hauteur examinée. Les hauteurs "anormales" sont identifiées, examinées et éventuellement corrigées.

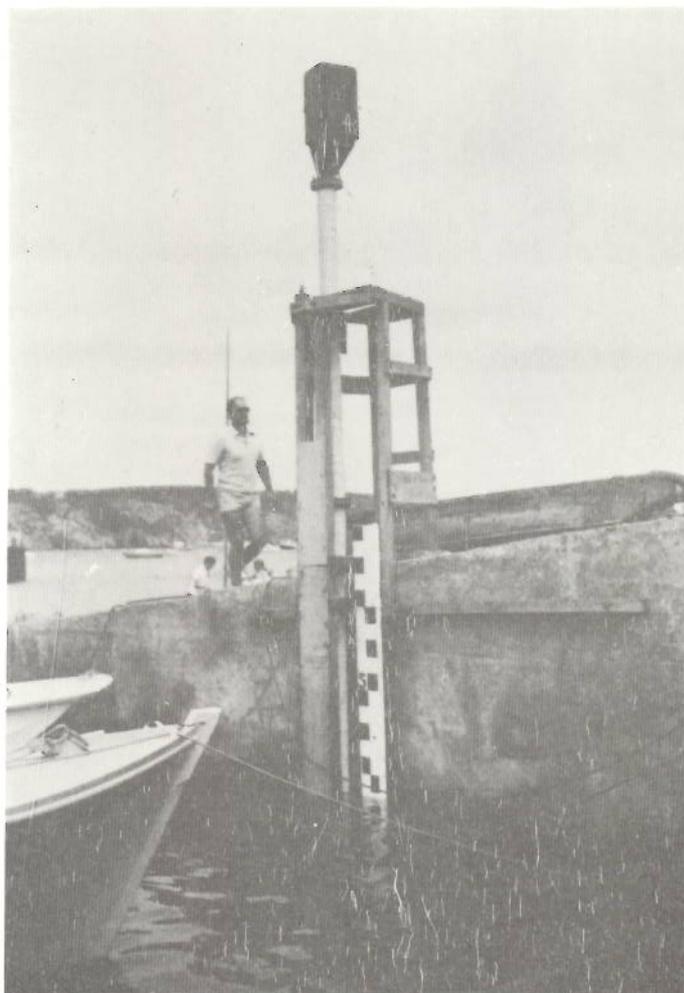
### 3 - Méthodes de détermination globales de la marée

L'essentiel des observations de marée est effectué près des côtes. Ces observations sont tout à fait insuffisantes pour déterminer les marées océaniques dont notre connaissance restait basée, jusqu'à ces dernières années, sur des modèles mathématiques. L'apparition des satellites artificiels a permis d'envisager une nouvelle approche globale du problème. Deux méthodes d'étude de la marée par les satellites sont en cours de développement : l'étude des perturbations d'orbite et plus récemment l'exploitation des mesures altimétriques.

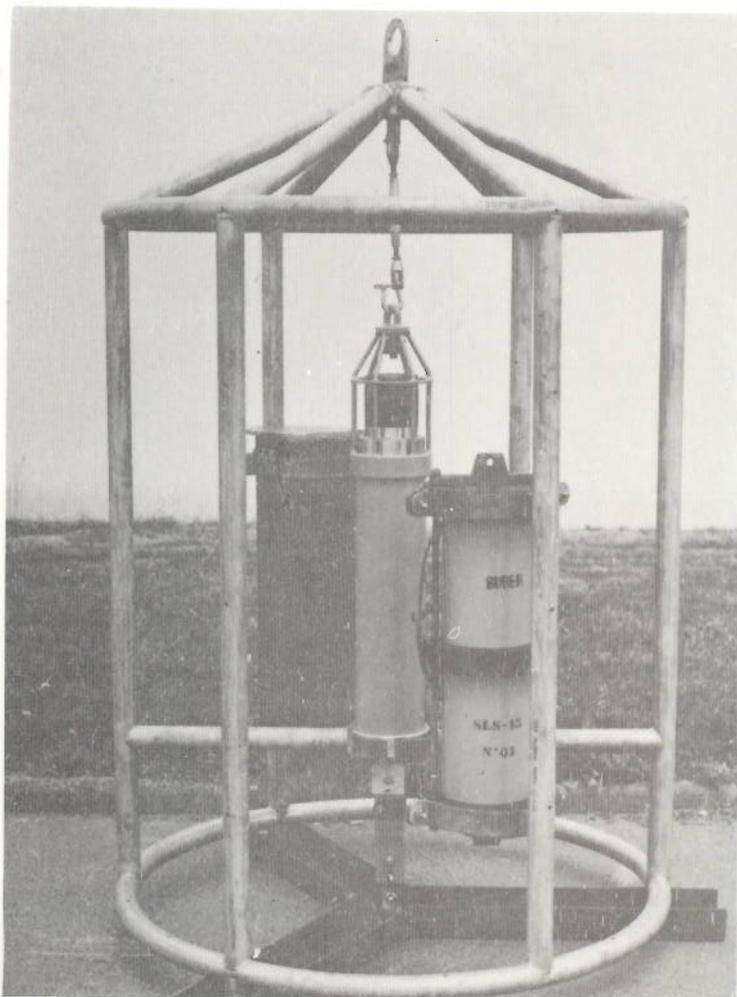
(quelques centimètres) pour qu'on puisse extraire la marée océanique de la marée "mesurée".

La difficulté essentielle réside dans la réduction des erreurs d'observation qui peuvent être de l'ordre du "signal" cherché. La précision actuelle des altimètres (0.1 m avec SEASAT -1 en 1978) paraît suffisante, mais par contre les erreurs de position restent de l'ordre du mètre. L'élimination de ces erreurs nécessite des traitements mathématiques complexes et l'obtention de longues séries d'observation. Les premiers résultats obtenus à partir des campagnes GEOS-3 (1975) et SEASAT -1 semblent prometteurs.

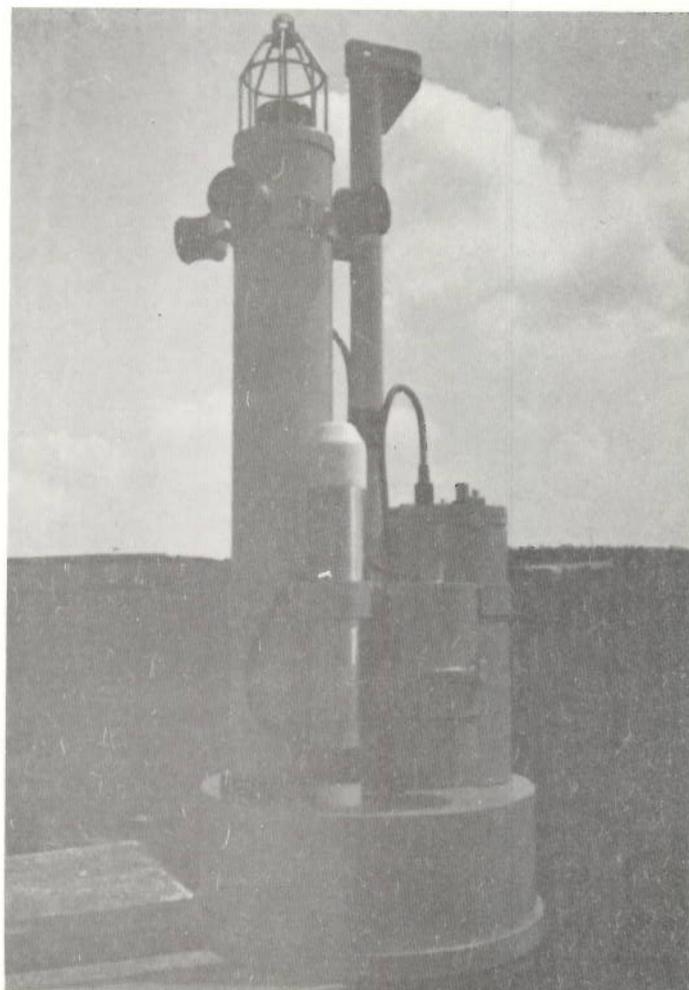
PLANCHE 1



Observatoire de marée : échelle et marégraphe OTT R16



Marégraphe SUBER SLS 13



Marégraphe grande profondeur du Centre Océanologique de Bretagne

Force génératrice de la marée

1. Coordonnées astronomiques et mesure du temps

1.1. La sphère céleste

Un point de l'espace est essentiellement caractérisé, pour l'observateur terrestre, par sa direction, ce qui revient à considérer sa projection sur une sphère centrée au point d'observation et de rayon quelconque. Cette sphère est appelée sphère céleste.

En raison de la distance énorme qui nous sépare des étoiles, la direction de l'une quelconque d'entre elles à un instant donné est la même quel que soit le point de la Terre d'où on l'observe. Par contre, pour les astres du système solaire (Soleil, Lune, planètes et leurs satellites) les distances ne sont pas assez grandes pour qu'on puisse négliger devant elles le rayon terrestre. Il faudra donc faire une correction pour passer de la direction dans laquelle un de ces astres est vu d'un point de la surface de la Terre à celle dans laquelle il serait vu d'un autre point ou du centre.

1.2. La Terre

Pour les usages astronomiques, la Terre peut être assimilée à un corps solide sensiblement sphérique. Le mouvement de ce corps est déterminé par celui de son centre de gravité T et par sa rotation autour d'un axe instantané TI passant par T et appelé axe du monde. Cet axe est presque fixe par rapport à la Terre, son extrémité, ou pôle, se déplaçant dans un cercle de moins de 15 mètres de rayon.

L'axe TI est orienté de manière que la rotation de la Terre, qui est presque rigoureusement uniforme, se fasse dans le sens direct. La demi-droite TI perce la surface terrestre au pôle Nord ou boréal, la demi-droite opposée au pôle Sud ou austral. Le plan mené par T perpendiculairement à TI est l'équateur, il partage la Terre en deux hémisphères qui prennent chacun le nom du pôle qu'ils renferment.

Si par le centre M de la sphère céleste on mène une parallèle à l'axe de rotation de la Terre, elle perce la sphère céleste en deux points appelés également pôle Nord et pôle Sud. L'équateur est le grand cercle dont le plan est parallèle à l'équateur terrestre.

En chaque point O de la Terre, il existe une direction parfaitement définie à chaque instant : celle du fil à plomb, c'est-à-dire celle de la pesanteur. C'est la verticale vraie ou verticale astronomique, ou simplement verticale, orientée vers le haut. Elle rencontre la sphère céleste en un point appelé zénith. Le point diamétralement opposé est le nadir. Le plan du grand cercle de la sphère céleste perpendiculaire à la direction de la verticale est l'horizon du point considéré.



- 1°) une origine O ;
- 2°) la direction d'un des 3 axes, Oz ;
- 3°) dans le plan Oxy perpendiculaire à Oz (plan fondamental du système) la direction de l'axe Ox ;
- 4°) l'orientation du système, qui achève de déterminer la direction du troisième axe. L'orientation est directe quand un observateur placé sur Oz, les pieds en O, la tête en z, voit Ox venir s'appliquer sur Oy en décrivant un angle de 90 degrés de la droite vers la gauche.

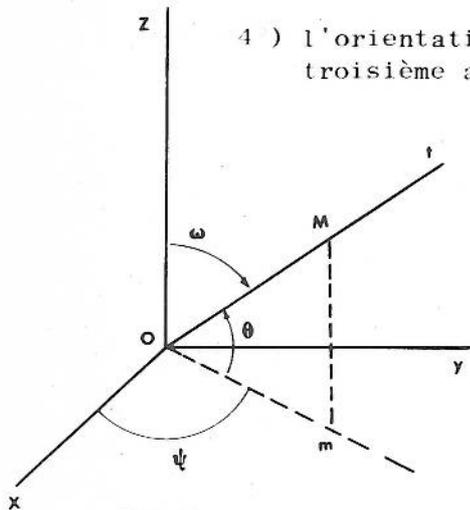


Fig. 3

On n'utilise pas en général les coordonnées rectangulaires  $x$   $y$   $z$  d'un point M, mais ses coordonnées polaires dans un système de pôle O ; ce sont :

- 1) la valeur algébrique  $r$  du rayon vecteur OM, comptée de O vers M,
- 2) l'angle  $\psi$  que fait Ox avec la projection orientée de OM sur le plan fondamental, compté dans le sens direct,

- 3) L'angle  $\theta$  que fait OM avec sa projection sur le plan fondamental, compté dans le sens qui amène Om sur Oz en faisant un angle de 90 degrés.

On a toujours :

$$x = r \cos \theta \cos \psi$$

$$y = r \cos \theta \sin \psi$$

$$z = r \sin \theta$$

On utilise parfois au lieu de  $\theta$  son complément :

$$\omega = 90^\circ - \theta$$

Pour éviter toute ambiguïté, on impose que  $r$  soit positif et  $\theta$  compris entre  $-90^\circ$  et  $+90^\circ$  ou encore  $\omega$  entre 0 et  $180^\circ$ .

Une direction n'a que deux coordonnées  $\psi$  et  $\theta$ .

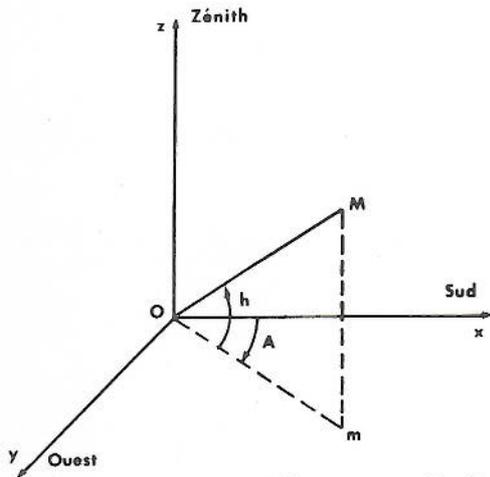
On distingue quatre systèmes de coordonnées.

### 1.3.2. Coordonnées horizontales (Fig. 4)

C'est un système local : l'origine O est le point d'observation. L'axe Oz est la verticale du lieu orientée positivement vers le zénith. Le plan fondamental est celui de l'horizon du point O et Ox est dirigé vers le Sud. Le système est orienté dans le sens rétrograde (Oy dirigé vers l'Ouest).

.../...

Fig 4



Les coordonnées angulaires d'une direction dans ce système sont l'azimut A et la hauteur h. Le complément de la hauteur est la distance zénithale.

Les géodésiens prennent Ox dirigé vers le Nord et comptent l'azimut Z de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  du Nord vers l'Est.

Les demi-plans passant par Oz et limités à cet axe sont des verticaux. Le demi-plan Oyz et le demi-plan opposé forment le premier vertical.

Le lieu des points de même hauteur sur la sphère céleste est un petit cercle ayant pour centre le zénith et appelé cercle de hauteur ou almicantarats. Les seuls astres visibles sont ceux qui ont une hauteur positive.

1.3.3. Coordonnées horaires ou équatoriales locales (Fig. 5)

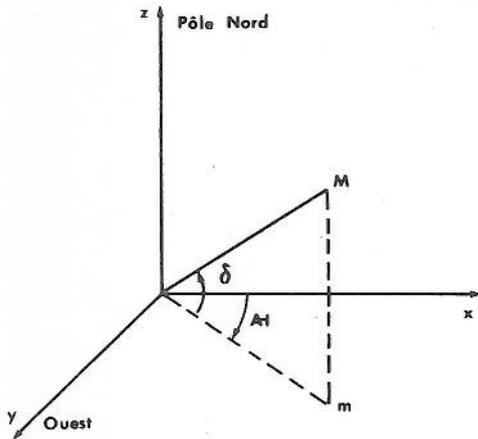


Fig. 5

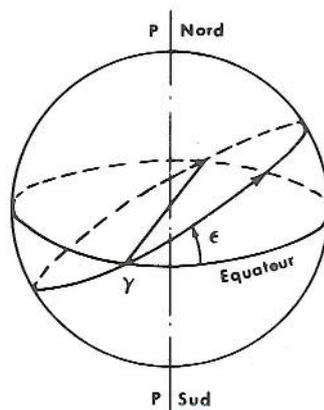
L'origine est encore le lieu d'observation, mais Oz est parallèle à l'axe du monde, et orienté positivement vers le pôle Nord. Le plan fondamental est celui de l'équateur, Ox étant dirigé vers le point le plus haut de l'équateur. Le système est orienté dans le sens rétrograde, de sorte que Oy est dirigé vers l'Ouest.

Les coordonnées angulaires sont l'angle horaire Ah et la déclinaison δ dont le complément est la distance polaire. Les angles horaires s'expriment d'ordinaire en temps (1 heure représentant 15 degrés). Les demi-plans passant par Oz et limités à cet axe déterminent sur la sphère céleste des cercles horaires.

1.3.4. Coordonnées équatoriales célestes ou uranographiques (Fig. 7)

L'origine O est un point quelconque. L'axe Oz est dirigé suivant l'axe du monde : le plan fondamental est donc encore l'équateur relatif à O, mais l'axe Ox est dirigé vers un point idéal de l'équateur : le point vernal ou équinoxe de printemps, point d'intersection du plan de l'équateur avec l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre correspondant au passage du soleil de l'hémisphère Sud à l'hémisphère Nord (Fig. 6).

Fig. 6



orbite apparente du Soleil (écliptique)

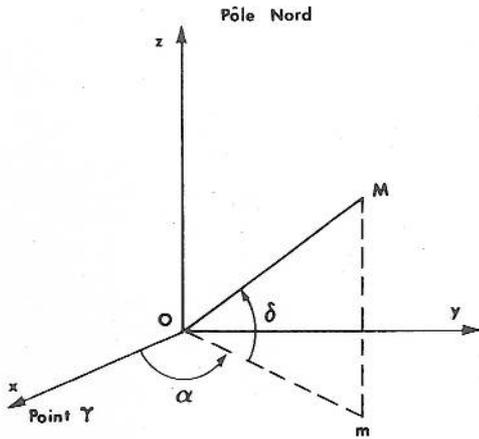


Fig. 7

Le système est orienté dans le sens direct. Les coordonnées sont l'ascension droite  $\alpha$  et la déclinaison  $\delta$ , cette dernière définie comme dans le système précédent. L'ascension droite est exprimée en temps.

L'angle horaire du point vernal est par définition le temps sidéral local  $t$ , d'où la relation fondamentale:

$$AH + \alpha = t$$

qui résulte de ce que les systèmes de coordonnées équatoriales, locales ou célestes, ont le même plan fondamental, mais sont orientés dans des sens opposés.

Le système de coordonnées uranographiques définit la position des étoiles indépendamment du lieu d'observation, les dimensions de la Terre étant négligeables par rapport aux distances qui la séparent des étoiles. En outre, comme les directions du point vernal et de l'axe du monde varient peu par rapport aux étoiles, l'ascension droite et la déclinaison d'une étoile varient peu elles-mêmes.

### 1.3.5. Coordonnées écliptiques

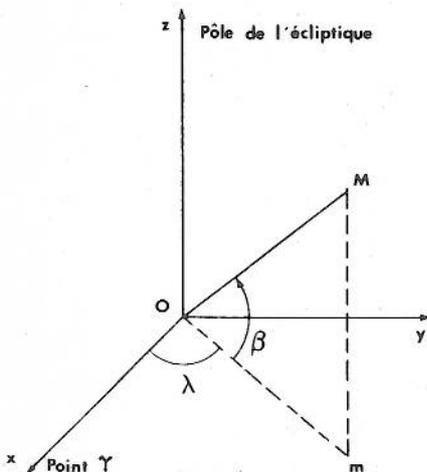


Fig. 8

Ce système est encore orienté, comme le précédent, dans le sens direct ; l'axe Ox est le même, dirigé vers l'équinoxe de printemps. Mais le plan fondamental est un plan particulier, plan de l'écliptique relatif au point O, parallèle au plan de l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre. Ce plan fait avec l'équateur un angle  $\epsilon$  qui varie peu, et est égal à  $23^{\circ}27'$  environ : c'est l'obliquité de l'écliptique.

Les coordonnées angulaires sont la longitude  $\lambda$  et la latitude  $\beta$ . Aucune confusion n'est possible entre ces coordonnées célestes et celles qui définissent un lieu à la surface de la Terre. Le pôle du monde a pour longitude  $90^{\circ}$  et pour latitude  $90^{\circ} - \epsilon$ .

Ce système offre les mêmes avantages que le précédent pour définir les coordonnées des étoiles.

### 1.3.6. Transformation de coordonnées

Les problèmes de transformation de coordonnées se résolvent en appliquant les formules de la trigonométrie sphérique (Annexe 1).

Les transformations de coordonnées locales font intervenir le triangle de position PZA (pôle, zénith, astre) (Fig. 9).

Les transformations de coordonnées célestes font intervenir le triangle  $\Pi$ PA (pôle de l'écliptique, pôle, astre) (Fig. 10).

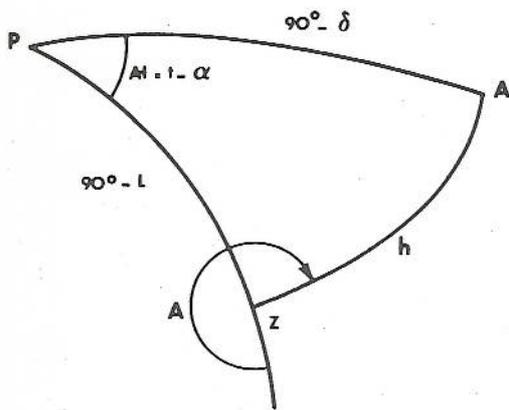


Fig. 9

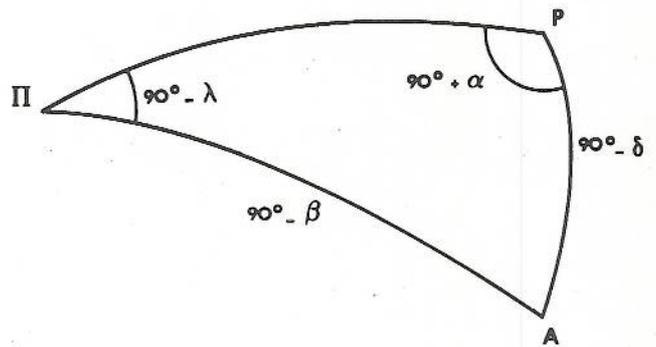


Fig. 10

### 1.3.7. Changement de lieu d'observation

Seules les coordonnées locales AH, A et h varient avec le lieu d'observation.

Il existe une relation simple entre les angles horaires AH et AH' d'une direction rapportée à deux points O et O' de la Terre. Soient en effet G et G' les longitudes de ces points, angles du méridien origine avec les méridiens de O et de O', comptés dans le sens rétrograde. AH + G ou AH' + G' représentent l'angle horaire de la direction considérée par rapport au méridien origine. Par suite, à 24 heures près, on a  $AH + G = AH' + G'$ . En particulier si la direction est celle du point vernal, AH et AH' sont les temps sidéraux locaux et il vient  $t + G = t' + G'$ .

### 1.4. Mesure du temps

En raison de la rotation de la Terre autour de son axe (mouvement diurne), l'angle horaire d'un astre varie de façon continue. Il peut donc servir à fixer une époque quelconque et par conséquent à mesurer le temps. Si on choisit un astre dont l'angle horaire varie à peu près proportionnellement avec le temps, le jour correspondant a alors une valeur à peu près constante : c'est la durée nécessaire pour que l'angle horaire augmente de 24 heures.

#### 1.4.1. Temps sidéral

A un instant donné et dans un lieu donné, le temps sidéral est l'angle horaire du point vernal en ce lieu. Le jour sidéral n'a pas une durée constante.

#### 1.4.2. Temps solaire vrai

Le temps solaire vrai (ou temps vrai) en un lieu donné est l'angle horaire apparent du centre du soleil en ce lieu. Le jour solaire n'a pas une durée constante.

.....

#### 1.4.3. Temps moyen

C'est l'angle horaire du soleil moyen : il est égal à la somme du terme constant et du terme proportionnel au temps de l'expression de l'angle horaire du soleil vrai.

#### 1.4.4. Temps civil

En un lieu donné, le temps civil est le temps moyen local augmenté de 12 h. Le jour civil commence à minuit, 12 h plus tôt que le jour moyen de même date.

#### 1.4.5. Temps universel (UT)

Le temps universel est le temps civil de Greenwich. On distingue (depuis 1956) :

- le temps universel fourni par les observations UTO qui se rapporte au pôle instantané et à l'angle de rotation de la Terre affecté de toutes ses irrégularités ;

- le temps universel UT 1 : il est obtenu après correction des fluctuations dues au mouvement des pôles ;

- le temps universel UT 2 : il est obtenu à partir de UT 1 en corrigeant des inégalités saisonnières de la rotation de la Terre.

#### 1.4.6. Temps atomique

Le temps atomique est défini par une succession de secondes. La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 (unité de temps du système SI depuis 1967).

L'origine de l'échelle de temps ainsi constituée - Temps Atomique International T A I - est un instant voisin du 1er janvier 1958 à 0 h. UT 2

#### 1.4.7. Temps universel coordonné (UTC)

C'est une échelle de compromis : c'est un temps atomique mais qui subit des ajustements de façon à rester voisin du temps universel et ne pas apporter de gêne aux utilisateurs du temps universel (navigateurs par exemple).

Depuis le 1er janvier 1972, le UTC diffère du TAI d'un nombre entier de secondes de telle sorte que :

$$| \text{UT1} - \text{UTC} | < 0,9 \text{ s}$$

Les signaux horaires sont émis dans le système UTC

#### 1.4.8. Date

Compte tenu de la durée très longue de la période utile, il est également nécessaire, indépendamment du choix de l'échelle de temps, de définir un système de numérotation des jours pour pouvoir situer sans ambiguïté une date quelconque. La solution la plus simple consiste à choisir une date origine que l'on numérote 0 ou 1 et d'énumérer les jours ultérieurs. Les époques antérieures peuvent être repérées par des nombres négatifs.

.....

Dans la période julienne, la date origine est le 1er janvier 4713 avant J.-C. à midi (calendrier julien). La journée qui sépare le midi du 1er à celui du 2 janvier de cette année porte le numéro 0.

Le tableau suivant donne le nombre de jours écoulés depuis cet instant origine jusqu'au 1er janvier à midi pour les années 1850 à 2099.

PÉRIODE JULIENNE

Nombre de jours de la période écoulés au 1 janvier,  
à 12<sup>h</sup> temps universel, de chaque année

Année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1850.....	239	6759	7124	7489	7855	8220	8585	8950	9316	9681	<b>0046</b>
1860.....	240	0411	0777	1142	1507	1872	2238	2603	2968	3333	3699
1870.....		4064	4429	4794	5160	5525	5890	6255	6621	6986	7351
1880.....		7716	8082	8447	8812	9177	9543	9908	<b>0273</b>	<b>0638</b>	<b>1004</b>
1890.....	241	1369	1734	2099	2465	2830	3195	3560	3926	4291	4656
1900.....		5021	5386	5751	6116	6481	6847	7212	7577	7942	8308
1910.....		8673	9038	9403	9769	<b>0134</b>	<b>0499</b>	<b>0864</b>	<b>1230</b>	<b>1595</b>	<b>1960</b>
1920.....	242	2325	2691	3056	3421	3786	4152	4517	4882	5247	5613
1930.....		5978	6343	6708	7074	7439	7804	8169	8535	8900	9265
1940.....		9630	9996	<b>0361</b>	<b>0726</b>	<b>1091</b>	<b>1457</b>	<b>1822</b>	<b>2187</b>	<b>2552</b>	<b>2918</b>
1950.....	243	3283	3648	4013	4379	4744	5109	5474	5840	6205	6570
1960.....		6935	7301	7666	8031	8396	8762	9127	9492	9857	<b>0223</b>
1970.....	244	0588	0953	1318	1684	2049	2414	2779	3145	3510	3875
1980.....		4240	4606	4971	5336	5701	6067	6432	6797	7162	7528
1990.....		7893	8258	8623	8989	9354	9719	<b>0084</b>	<b>0450</b>	<b>0815</b>	<b>1180</b>
2000.....	245	1545	1911	2276	2641	3006	3372	3737	4102	4467	4833
2010.....		5198	5563	5928	6294	6659	7024	7389	7755	8120	8485
2020.....		8850	9216	9581	9946	<b>0311</b>	<b>0677</b>	<b>1042</b>	<b>1407</b>	<b>1772</b>	<b>2138</b>
2030.....	246	2503	2868	3233	3599	3964	4329	4694	5060	5425	5790
2040.....		6155	6521	6886	7251	7616	7982	8347	8712	9077	9443
2050.....		9808	<b>0173</b>	<b>0538</b>	<b>0904</b>	<b>1269</b>	<b>1634</b>	<b>1999</b>	<b>2365</b>	<b>2730</b>	<b>3095</b>
2060.....	247	3460	3826	4191	4556	4921	5287	5652	6017	6382	6748
2070.....		7113	7478	7843	8209	8574	8939	9304	9670	<b>0035</b>	<b>0400</b>
2080.....	248	0765	1131	1496	1861	2226	2592	2957	3322	3687	4053
2090.....		4418	4783	5148	5514	5879	6244	6609	6975	7340	7705

Pour des raisons de tradition et de commodité on a été conduit à compliquer le système par un découpage en années et mois suivant des règles variables constituant divers types de calendriers. Dans le calendrier julien on distingue les années communes de 365 jours divisées en 12 mois de 31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30 et 31 jours, et les années bissextilles de 366 jours dans lesquelles le second mois est de 29 jours.

Les années bissextiles sont celles dont le millésime est multiple de 4. Dans le calendrier grégorien, en vigueur de nos jours, les années dont le millésime est multiple de 100 sans l'être de 400 sont communes. La durée moyenne de l'année (365,2425 jours) est alors plus proche de celle de l'année tropique (durée séparant deux passages consécutifs du soleil dans la direction du point vernal, soit 365,2422 jours).

## 2. Définition de la force génératrice de la marée

Dans l'étude de la marée, on s'intéresse au mouvement des particules liquides des océans dans un repère lié à la Terre. Ces particules sont soumises d'une part à des forces d'origine terrestre et, d'autre part, au champ d'attraction des astres.

On trouvera en annexe 2 un rappel des différents principes permettant de déterminer le mouvement d'un point matériel dans un repère lié à la Terre, compte tenu des hypothèses simplificatrices suivantes :

- la ligne des pôles garde une direction fixe dans l'espace,
  - la vitesse de rotation  $\omega$  de la Terre autour de son axe est constante,
  - la Terre est assimilable à une sphère indéformable de centre T.
- Dans ces conditions, un repère lié à la Terre est animé :

- d'un mouvement de translation qui est le même que si toute la masse de la Terre était concentrée en son centre T.
- d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles.

L'accélération relative  $\vec{\gamma}_r$  d'un point M de masse m, dans un repère lié à la Terre est alors donnée par la relation :

$$\vec{\gamma}_r(M) = \underbrace{\vec{g}(M)}_{\substack{\text{accélération} \\ \text{absolue dans} \\ \text{un repère fixe} \\ \text{par rapport} \\ \text{aux étoiles}}} + \underbrace{\vec{H}_a(M)}_{\substack{\text{accélération} \\ \text{d'entraînement} \\ \text{du repère} \\ \text{terrestre}}} - \underbrace{(\vec{H}_a(T) - \omega^2 \vec{RM})}_{\substack{\text{accélération} \\ \text{d'entraînement} \\ \text{du repère} \\ \text{terrestre}}} - \underbrace{2 \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r(M)}_{\substack{\text{accélération} \\ \text{de Coriolis}}}$$

avec :  $\vec{g}$  : champ d'attraction de la Terre

R : projection de M sur l'axe de rotation de la Terre

$\vec{V}_r$  : vitesse relative (dans le repère lié à la Terre)

$\vec{H}_a$  : champ d'attraction astronomique

Le terme  $2 \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$  (accélération de Coriolis) s'annule avec  $\vec{V}_r$  : il est susceptible de modifier le mouvement relatif de M mais ne peut en être la cause.

Le terme  $\vec{g}(M) + \omega^2 \vec{RM} + (\vec{H}_a(M) - \vec{H}_a(T))$  représente la pesanteur "vulgaire"



Traçons CD arc de cercle de centre  $A_i$  :  $A_i D = A_i C = \frac{\Delta_i^2}{r_i}$

" DE parallèle à TM :  $A_i E = A_i D \frac{A_i M}{A_i T}$  (triangles  $A_i DE$  et  $A_i TM$  semblables)

" EF arc de cercle de centre  $A_i$  :  $A_i F = A_i E = \frac{\Delta_i^3}{r_i^2}$

d'où  $\frac{A_i F}{\Delta_i^2} = \frac{A_i M}{r_i^2}$

or  $\vec{MA}_i = \Delta_i \vec{v}_i$  et  $\vec{AF} = - \frac{AF}{r_i} \cdot \vec{u}_i = - \frac{\Delta_i^3}{r_i^2} \vec{u}_i$

soit  $\vec{MF} = \vec{MA}_i + \vec{AF} = \Delta_i^3 \left( \frac{\vec{v}_i}{\Delta_i^2} - \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \right)$

$$\vec{F}_i = \frac{km_i}{\Delta_i^3} \vec{MF}$$

Cette construction se simplifie, si on admet que  $A_i$  est à l'infini, ( $A_i M$  et  $A_i T$  sont alors parallèles) et devient la règle de Proctor : les arcs de cercle sont remplacés par des segments de droite perpendiculaires à  $TA_i$  et  $TF = 3 TB$  (Fig. 13).

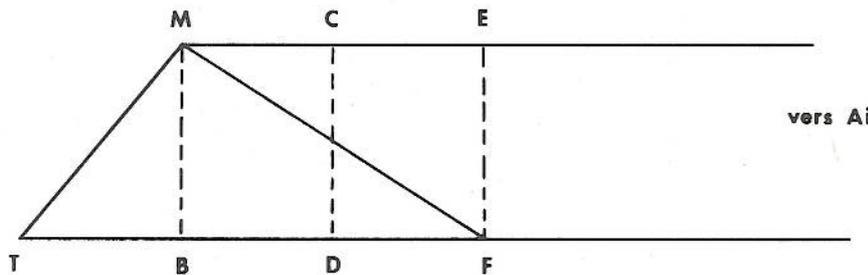


Fig. 13

Cette règle permet de construire la force génératrice due à un astre le long d'un grand cercle dont le plan passe par M.

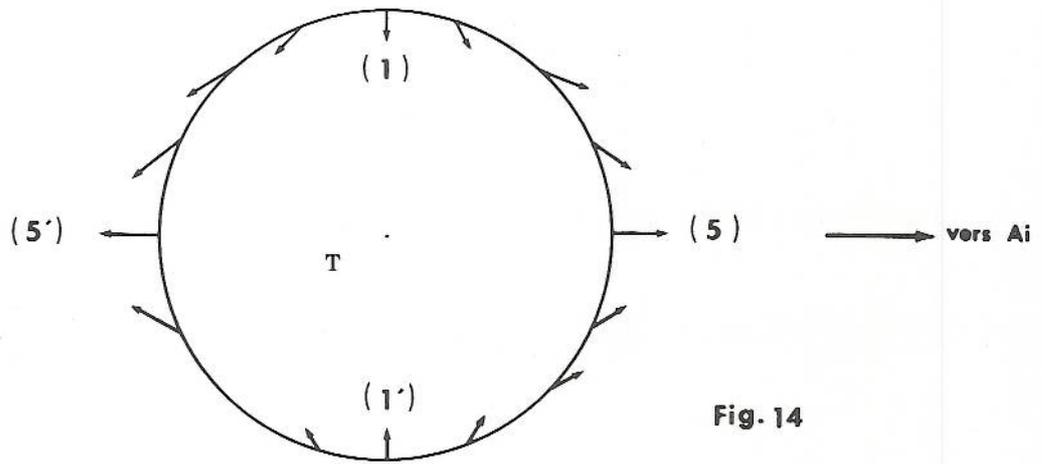


Fig. 14

Le champ est symétrique par rapport à  $TA_1$  et par rapport au diamètre perpendiculaire. T est centre de symétrie. La force génératrice est minimale et centripète en (1) et (1') (astre dans l'horizon du point). Elle est maximale et centrifuge en (5) et (5') (astre au zénith ou au nadir du point). Le champ est de révolution autour de  $TA_1$ .

### 3.2. Périodicité de la force génératrice

La rotation de la Terre autour de son axe fait tourner sa surface à l'intérieur du champ de la force génératrice. Supposons d'abord l'astre fixe.

#### 3.2.1. Astre dans l'équateur

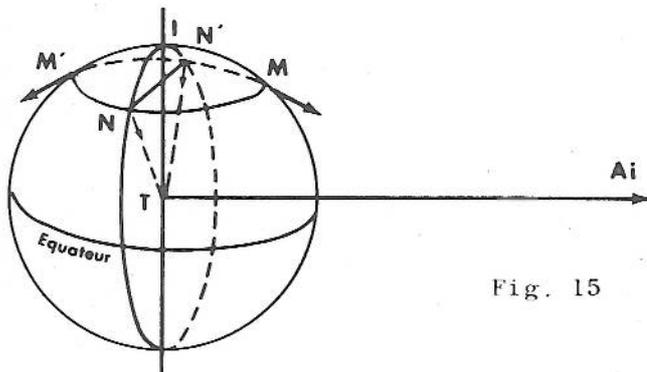


Fig. 15

Le point M décrit le parallèle  $MN'M'N$ . La force est maximum en M et M' (passage de l'astre au méridien du lieu) et les deux maximums sont égaux. La force est minimale en N et N' (astre dans l'horizon). La force a donc une période égale à la durée d'une demi-rotation terrestre diminuée du moyen mouvement de l'astre ; elle est semi-diurne pure.

#### 3.2.2. Astre non dans l'équateur

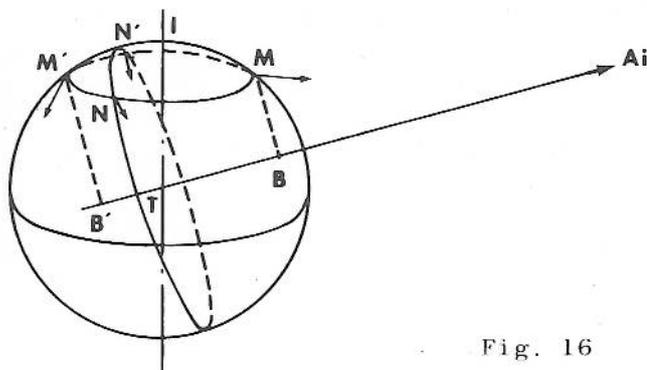


Fig. 16

La force est toujours maximum en M et M' mais ces maximums sont inégaux (comme TB et TB'). Les minimums en N et N' restent égaux. La force garde sa périodicité semi-diurne mais on voit apparaître une inégalité diurne sur les maximums.

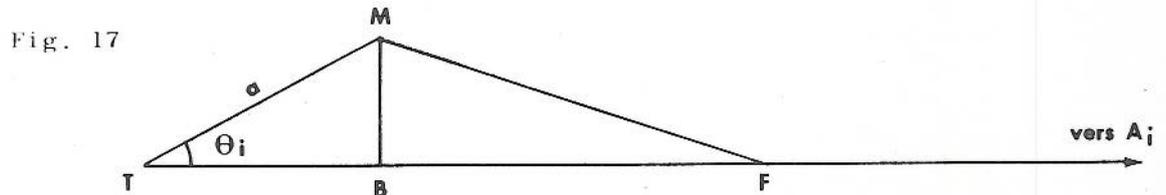
En réalité, l'astre se déplace simultanément et les variations de sa déclinaison et de sa distance font varier la force génératrice. Toute irrégularité du mouvement de l'astre entraîne une inégalité dans les variations de la force génératrice.

### 3.3. Grandeur de la force génératrice. Valeurs numériques

Nous avons vu que :

$$\vec{F}_i = \frac{km_i}{\Delta^3_i} \vec{MF}$$

Supposons  $r_i$  grand devant le rayon de la Terre et appliquons la règle de Proctor :



$$TF = 3 TB = 3a \cos \theta_i$$

$$\text{or } MF^2 = MT^2 + TF^2 - 2 MT \cdot TF \cos \theta_i$$

$$\text{donc } MF^2 = a^2 + 9 a^2 \cos^2 \theta_i - 6 a^2 \cos^2 \theta_i = a^2 (3 \cos^2 \theta_i + 1)$$

$$\text{d'où } F_i = \frac{km_i}{a^2} \left( \frac{a}{r_i} \right)^3 \sqrt{3 \cos^2 \theta_i + 1}$$

Introduisons la valeur  $g$  du champ d'attraction de la Terre en M :

$$g = \frac{km_T}{a^2}$$

Il vient

$$F_i = g \frac{m_i}{m_T} \left( \frac{a}{r_i} \right)^3 \sqrt{3 \cos^2 \theta_i + 1}$$

La force génératrice des marées est proportionnelle à la masse de l'astre et inversement proportionnelle au cube de sa distance à la Terre. Elle est maximum pour  $\theta_i = 0$  ou  $\pi$  (astre au zénith ou au nadir) et minimum pour

$\theta_i = \frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2}$  (astre dans l'horizon) ; elle ne s'annule jamais.

Pour la lune :

$$\frac{m_L}{m_T} = \frac{1}{81,30} \quad \text{et} \quad \frac{a}{r_L} = \frac{1}{60,27}, \quad \frac{m_L}{m_T} \left( \frac{a}{r_L} \right)^3 = \frac{1}{17797316}$$

le maximum de  $F_L$  est d'environ  $10^{-7}$  g

Pour le Soleil :

$$\frac{m_S}{m_T} = 332\,946 \text{ et } \frac{a}{r_S} = \frac{1}{23\,455}, \frac{m_S}{m_T} \left( \frac{a}{r_S} \right)^3 = \frac{1}{38754335}$$

le maximum de  $F_S$  est d'environ  $5 \times 10^{-8}$  g

La force due aux autres astres est négligeable.

La faiblesse de la force génératrice est une des particularités les plus remarquables des marées. Dans le cas le plus favorable (astres au zénith ou au nadir), son action est d'environ  $\frac{1}{6\,000\,000}$  de la pesanteur, ce qui correspond à la variation de la pesanteur à l'air libre sur une hauteur de 0,5 m.

#### 4. Potentiel générateur de la marée

##### 4.1. Définition du potentiel d'un champ de force

On dit qu'un champ de force  $F$  dérive d'un potentiel  $V$  si on peut écrire :

$$\vec{F} = -\text{grad } V$$

Le potentiel est alors défini à une constante près. Sa variation entre deux points A et B est **égale au** travail effectué par le champ de force pour déplacer la masse unité de A vers B et ce travail est indépendant du trajet suivi.

On peut montrer que le champ d'attraction créé par un point matériel (ou une sphère) de masse  $m$  dérive d'un potentiel fonction de la distance au point (ou au centre de la sphère) :

$$V = -\frac{km}{r}$$

##### 4.2. Calcul du potentiel générateur

Considérons un repère  $T x y z$  lié à la Terre ( $Tz$  axe de rotation terrestre) et un astre A de masse  $m$ .

La force génératrice de la marée exercée sur l'unité de masse placée en M (x, y, z) se compose : (voir paragraphe 2)

- de la force d'attraction sur l'unité de masse placée en T, changée de signe, soit  $\vec{F}_1$ , indépendante du point.

- de la force d'attraction sur l'unité de masse placée en M, soit  $\vec{F}_2$

$$\vec{F}_1 = - \frac{km}{r^2} \vec{u}$$

$$\vec{F}_2 = + \frac{km}{\Delta^2} \vec{v}$$

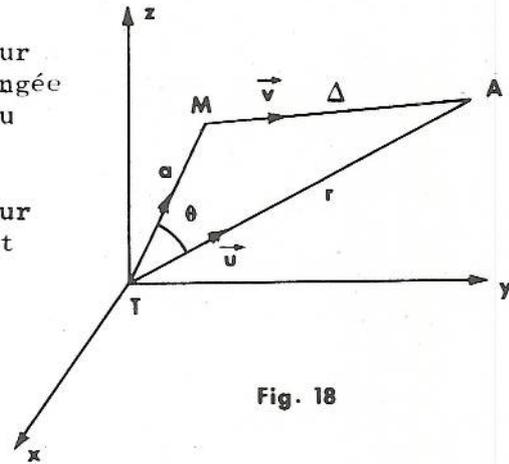


Fig. 18

Soit  $u_x, u_y, u_z$  les composantes du vecteur unité  $\vec{u}$  (cosinus directeurs de TA)

$$F_{1x} = - \frac{km}{r^2} u_x$$

$$F_{1y} = - \frac{km}{r^2} u_y$$

$$F_{1z} = - \frac{km}{r^2} u_z$$

sont les trois composantes de  $\vec{F}_1$  qui dérivent donc du potentiel  $V_1$  :

$$V_1 = - \frac{km}{r^2} (u_x x + u_y y + u_z z)$$

soit 
$$V_1 = - \frac{km}{r^2} \vec{u} \cdot \vec{TM}$$

ou 
$$V_1 = - \frac{km}{r^2} a \cos \theta$$

Le champ d'attraction  $\vec{F}_2$  dérive du potentiel  $V_2$  :

$$V_2 = \frac{km}{\Delta}$$

Le potentiel générateur est donc :

$$V = V_1 + V_2 = km \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{a}{r^2} \cos \theta \right)$$

Dans le triangle ATM :

$$\Delta^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta \quad -1/2$$

$$\text{d'où } \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

On peut développer le potentiel en série entière en  $\frac{a}{r}$  (parallaxe horizontale de l'astre)

$$V = \frac{km}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n \right\}$$

où les  $P_n$  sont les polynômes de Legendre définis par les relations

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

$$\text{d'où } P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

$$P_4(\cos \theta) = \frac{1}{8} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$$

Le premier terme est indépendant de  $M$  et peut être négligé puisque le potentiel est défini à une constante près.

Comme  $\frac{a}{r}$  est de l'ordre de  $\frac{1}{60}$  pour la Lune et de  $\frac{1}{23400}$  pour le Soleil, les termes de la série décroissent rapidement. Les termes d'ordre supérieur à 4 sont négligeables et on peut, en première approximation, limiter le développement au terme d'ordre 2.

En introduisant,  $g = \frac{km_T}{a^2}$ , il vient

$$V = \frac{m}{m_T} \frac{g a^2}{r} \sum_{n=2}^4 P_n(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n$$

On remplace généralement  $\left(\frac{a}{r}\right)^n$  par  $\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \left(\frac{a}{r_0}\right)^n$ , en appelant  $r_0$  la distance moyenne de l'astre.  $\frac{a}{r_0}$  est alors une constante et  $i = \frac{r_0}{r}$  varie de part et d'autre de l'unité.

$$V = \frac{m}{m_T} \frac{g a^4}{r_0^3} \sum_{n=2}^4 i^{n+1} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{n-2} P_n(\cos \theta)$$

La somme des potentiels relatifs à la Lune et au Soleil constitue le potentiel luni-solaire.

.../...

### 4.3. Introduction des coordonnées horaires de l'astre

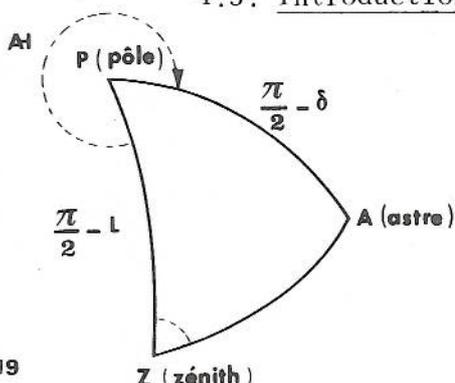


Fig. 19

L'astre intervient dans l'expression du potentiel par sa distance  $r$  et par sa distance zénithale géocentrique  $\theta$ .

L'introduction des coordonnées horaires de l'astre, déclinaison  $\delta$ , angle horaire AH, permet de mettre en évidence l'effet de la rotation relative de la Terre par rapport à l'astre, rotation caractérisée par l'angle horaire AH.

Considérons sur la sphère céleste de centre T le triangle de position P (pôle Nord), Z (zénith de M), A (astre). La relation fondamentale de la trigonométrie sphérique (voir annexe 1) s'écrit :

$$\cos \theta = \sin L \sin \delta + \cos L \cos \delta \cos AH$$

où  $L$  est la latitude du lieu.

Il s'agit de reporter cette expression de  $\cos \theta$  dans la relation donnant  $V$ .

Si on se limite au terme en  $P_2$  ( $\cos \theta$ ), qui est prépondérant, on obtient :

$$V = \frac{3}{4} g a \frac{m}{m_T} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left[ \frac{(1-3 \sin^2 L)(1-3 \sin^2 \delta)}{3} + \sin 2L \sin 2\delta \cos AH + \cos^2 L \cos^2 \delta \cos 2AH \right]$$

L'angle horaire du Soleil varie à peu près comme le temps moyen, soit 24 heures par jour solaire moyen, celui de la Lune de 23 h 12 mn par jour solaire moyen.

Posons 
$$c = \frac{3}{4} g a \left( \frac{m}{m_T} \right) \left( \frac{a}{r_0} \right)^3$$

Nous voyons apparaître trois termes aux caractéristiques différentes (Fig. 20)

$$A = c i^3 \left( \sin^2 L - \frac{1}{3} \right) \left( \sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) \quad \text{ne dépend que de la latitude :}$$

c'est un terme zonal dont les nodales (lieux des points de la surface de la Terre tels que  $A = 0$ ) sont les parallèles  $35^\circ 16' N$  et  $35^\circ 16' S$ . Comme il est indépendant de AH, on dit que c'est un terme à longue période;  $\sin \delta$  intervenant par son carré, la période est de 14 jours pour la Lune et de 6 mois pour le Soleil.

$B = c i^3 \sin 2L \sin 2\delta \cos AH$  admet comme nodales le méridien perpendiculaire à celui de l'astre ( $\cos AH = 0$ ) et l'équateur ( $\sin 2L = 0$ ). C'est un terme tésséral dont le signe change avec celui de la déclinaison de l'astre. Sa périodicité est diurne et son amplitude est modulée par le mouvement de l'astre.  $\delta$  variant entre  $-23^\circ$  et  $+23^\circ$  pour le Soleil et entre  $-28^\circ$  et  $+28^\circ$  pour la Lune,  $\sin 2\delta$  varie entre  $-0,8$  et  $+0,8$  environ. L'amplitude est maximum aux latitudes  $45^\circ N$  et  $45^\circ S$  et lorsque la déclinaison de l'astre est maximum.

$C = c_i^3 \cos^2 L \cos^2 \delta \cos 2 AH$  admet comme nodales les méridiens situés à  $45^\circ$  du méridien de l'astre qui divisent la surface de la Terre en quatre secteurs où il est tantôt négatif et tantôt positif. C'est un terme sectoriel. Il admet une périodicité semi-diurne. La modulation de son amplitude par le mouvement de l'astre reste faible,  $\cos^2 \delta$  variant entre 1 et 0,8 environ. L'amplitude est nulle au pôle et maximum à l'équateur ou lorsque la déclinaison de l'astre est nulle.

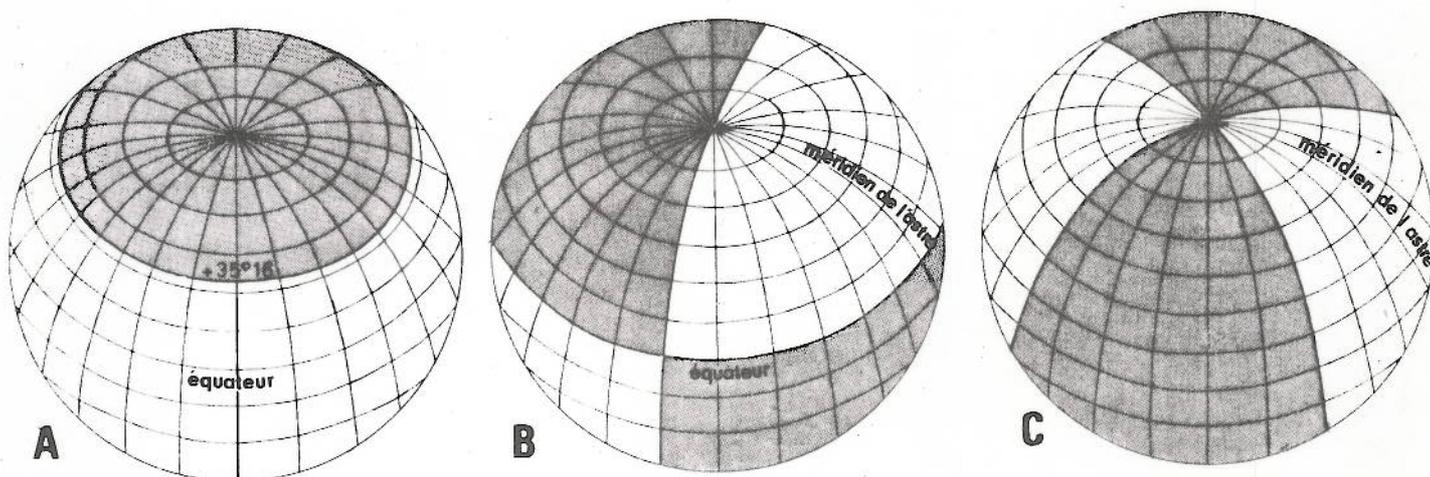


Fig. 20

Distribution géographique des 3 termes du potentiel générateur de la marée

De la même façon, on montre que le terme en  $P_3 (\cos \theta)$  comporte des termes indépendants de  $AH$  et des termes en  $\cos AH$ ,  $\cos 2 AH$ ,  $\cos 3 AH$ . Si on veut prendre en compte des termes encore plus faibles, on peut chercher à évaluer  $P_4 (\cos \theta)$ , d'où des termes indépendants de  $AH$  et des termes en  $\cos AH$ ,  $\cos 2 AH$ ,  $\cos 3 AH$  et  $\cos 4 AH$ .

#### 4.4. Périodes des termes du potentiel

Le potentiel luni-solaire peut donc se mettre sous la forme :

$$V = \frac{3}{4} g a \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{m_T} \left( \frac{a}{r_j} \right)^3 \left\{ \sum_{n=0}^4 b_n \left( \delta_j, \frac{a}{r_j} \right) \cos n AH_j \right\}$$

où l'indice  $j = 1$  est relatif à la Lune et  $j = 2$  au Soleil.

Les termes  $b_n$  sont des combinaisons linéaires de produits du type  $\cos^p \delta \sin^q \delta$  dont les coefficients dépendent de  $\sin L$ ,  $\cos L$  et  $\frac{a}{r}$ .  $b_3$  et  $b_4$  sont respectivement d'ordre  $\frac{a}{r}$  et  $\left(\frac{a}{r}\right)^2$ . Le maximum de la somme des exposants ( $p + q$ ) est égal à l'indice du dernier polynôme de Legendre pris en compte.

Les fonctions  $\cos \delta$  et  $\sin \delta$  peuvent être remplacées par des développements limités :

$$\cos \delta \approx 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

$$\sin \delta \approx \delta - \frac{\delta^3}{6}$$

$$\text{d'où } \cos^p \delta \sin^q \delta \approx \sum_{k=0}^3 \lambda_k \delta^k$$

dans lesquels les termes suivants sont effectivement négligeables pour

$$|\delta| \leq 30^\circ$$

La déclinaison  $\delta$  peut s'exprimer sous la forme d'un développement du type :

$$\delta = \sum_{k=1}^N \mu_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$$

où les fréquences  $f_k$  correspondent aux mouvements de la Lune et de la Terre sur leurs orbites respectives, affectés de diverses perturbations (précession de l'orbite lunaire; variations de son excentricité et de son inclinaison; précession des équinoxes, etc...)

Les angles horaires  $AH_1$  et  $AH_2$  parcourent un cycle complet au cours d'un jour lunaire ou solaire. On aura donc (pour  $p = q = 0$ ), des oscillations du potentiel générateur de fréquences 1, 2, 3 et 4 cycles par jour lunaire ou solaire, constituant les fréquences de base.

En utilisant les formules de linéarisation des produits de fonctions trigonométriques, du type :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

on fait apparaître dans les produits  $\cos nAH$  (pour  $p + q \neq 0$ ), de nouvelles fréquences qui diffèrent des  $n$  fréquences de base de combinaisons linéaires des fréquences  $f_k$ .

Ces résultats qualitatifs seront précisés au chapitre VI lors de l'étude détaillée du développement harmonique du potentiel générateur.

Formules de trigonométrie sphérique

1. Formule fondamentale

Considérons sur la sphère unité de centre T le triangle sphérique ABC défini par trois arcs de grand cercle et dont nous désignons les côtés par a, b, c et les angles par A, B, C.

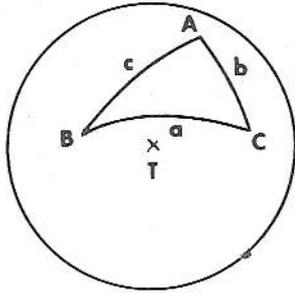


Figure 1

Introduisons le repère  $T_x y z$  tel que  $\vec{Tz}$  passe par A et que le plan  $T_x z$  contienne TB (fig.2)

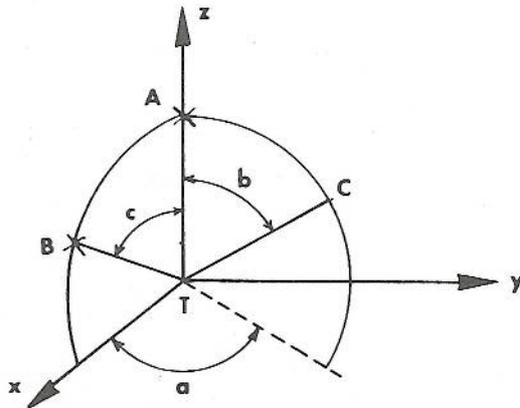


Figure 2

Dans ce repère, les vecteurs unitaires  $\vec{TB}$  et  $\vec{TC}$  ont pour composantes :

$$\vec{TB} \begin{vmatrix} \sin c \\ 0 \\ \cos c \end{vmatrix} \quad \vec{TC} \begin{vmatrix} \sin b \cos A \\ \sin b \sin A \\ \cos b \end{vmatrix}$$

D'où :

$$\vec{TB} \cdot \vec{TC} = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

On en déduit la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique en remarquant que :

$$\vec{TB} \cdot \vec{TC} = \cos a$$

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

(1)

## 2 . Autres formules

### 2.1 - Relation des sinus

D'après la formule fondamentale :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

d'où

$$\sin^2 A = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2 \cos b \cos c \cos a}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

soit

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

Le second terme est invariant par permutation circulaire, d'où :

$$\boxed{\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}} \quad (2)$$

### 2.2 - Formule en sinus-cosinus

Par permutation circulaire sur la formule fondamentale, on obtient :

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$

d'où en reportant dans (1)

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \sin a \sin c \cos B \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

soit

$$\boxed{\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B} \quad (3)$$

### 2.3 - Formule des cotangentes

D'après (2)

$$\sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A}$$

en reportant dans (3), il vient :

$$\boxed{\sin B \cotg A = \cotg a \sin c - \cos c \cos B} \quad (4)$$

Eléments de mécanique newtonienne

1. Notions de cinématique

1.1. Définitions

Soit un repère orthonormé  $R ( Oxyz )$  de vecteurs unitaires  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ,  $M$  un point de coordonnées  $x, y, z$ , fonctions du temps  $t$ . Le lieu des positions successives de  $M$  est appelé trajectoire de  $M$ .

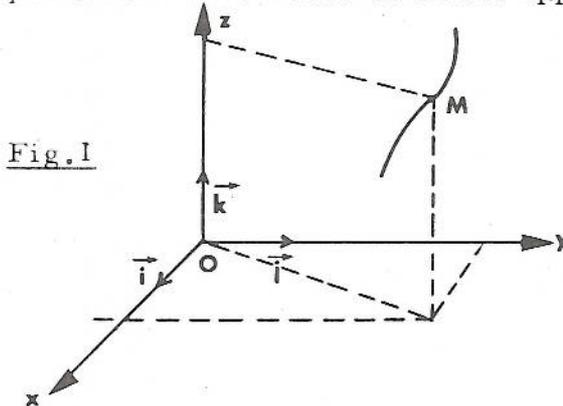


Fig.1

On appelle vitesse  $\vec{V}$  de  $M$  dans le repère  $R$  la quantité

$$\vec{V} (M/R) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{M}(t+dt) - \vec{M}(t)}{dt}$$

soit

$$\vec{V} (M/R) = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

On définit l'accélération  $\vec{\gamma}$  de  $M$

par la relation :

$$\vec{\gamma} (M/R) = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

1.2. Cinématique du solide

Un solide est un ensemble de points dont les distances mutuelles sont invariables dans le temps.

On montre que la vitesse d'un point  $M$  quelconque d'un solide s'écrit :

$$\vec{V} (M/R) = \vec{V} (O/R) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM} \quad (1)$$

où  $O$  est un point du solide

$\vec{\omega}$  un vecteur indépendant de  $O$ , appelé vecteur "rotation" du mouvement du solide par rapport à  $R$ . Si  $\vec{\omega} = 0$ , le solide est en translation par rapport à  $R$ .

On en déduit :

$$\vec{\gamma} (M/R) = \vec{\gamma} (O/R) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) \quad (2)$$

1.3. Mouvement relatif

Soit  $R_1 ( O_1 x_1 y_1 z_1 )$  un repère mobile par rapport à  $R$  et dont le mouvement est connu.

Le mouvement de  $R_1$  par rapport à  $R$  est appelé mouvement d'entraînement

Le mouvement de  $M$  par rapport à  $R$  est dit mouvement absolu et le mouvement de  $M$  par rapport à  $R_1$  est dit mouvement relatif.

On établit en cinématique les relations suivantes :

$$\vec{V}_a(M/R) = \vec{V}_r(M/R_1) + \vec{V}_o(M \in R_1 / R) \quad (3)$$

$$\vec{V}_a(M/R) = \vec{V}_r(M/R_1) + \vec{V}_o(M \in R_1 / R) + \vec{V}_c(R) \quad (4)$$

dans lesquelles :

$\vec{V}_a$  est la vitesse absolue de  $M$  (par rapport à  $R$ )

$\vec{V}_r$  est la vitesse relative de  $M$  (par rapport à  $R_1$ )

$\vec{V}_o$  est la vitesse d'entraînement : vitesse absolue du point de  $R_1$  coïncidant avec  $M$  à l'instant considéré

$\vec{V}_a$  est l'accélération absolue de  $M$

$\vec{V}_o$  est l'accélération relative de  $M$  : accélération du point de  $R_1$  coïncidant avec  $M$  à l'instant considéré

$\vec{V}_c$  est l'accélération de Coriolis :  $\vec{V}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$  où  $\vec{\omega}$  est le vecteur rotation du mouvement de  $R_1$  par rapport à  $R$ .

## 2. Principe de la mécanique newtonienne.

Dans un repère "fixe" par rapport aux étoiles (repère de Copernic) le mouvement d'une masse ponctuelle satisfait à la loi fondamentale de la dynamique

$$\vec{F} = m \vec{V}_a$$

où  $\vec{F}$  est la résultante des forces appliquées

$m$  est la masse

$\vec{V}_a$  est l'accélération du point par rapport au repère de Copernic.

Dans un repère quelconque, on tire de la relation (4)

$$m \vec{V}_r = \vec{F} - m \vec{V}_o - m \vec{V}_c \quad (5)$$

si  $\vec{V}_o = \vec{V}_c = 0$  (translation uniforme) on dit que le repère est galiléen.

Dans un repère galiléen la relation (5) se simplifie en :

$$\vec{F} = m \vec{V}_r$$

## 3 - Dynamique du solide.

On montre que le mouvement du centre de gravité  $G$  d'un solide de masse  $m$  est le même que celui d'un point matériel de masse  $m$  soumis à la résultante des forces extérieures au solide.

$$m \vec{V}_a(G) = \vec{F} \text{ extérieures. } (6)$$

Le mouvement d'un solide se décompose en un mouvement de translation du centre de gravité et en un mouvement de rotation autour de ce centre de gravité.

#### 4 - Attraction universelle

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  exerce sur un point matériel  $M_1$  de masse  $m_1$  placé à la distance  $r$  d'une force  $\vec{F}$  donnée par :

$$\vec{F} = -k \frac{m m_1}{r^2} \vec{u}$$

où  $k$  est la constante de l'attraction universelle

$\vec{u}$  est le vecteur unitaire de  $\overrightarrow{MM_1}$



Fig. 2

Une sphère de masse  $m$  placée en  $M$  exerce la même attraction sur  $M_1$  que si toute sa masse était concentrée en son centre  $M$

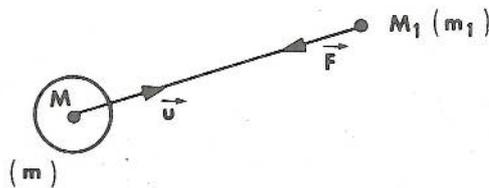


Fig. 3

$$\vec{F} = -k \frac{m m_1}{r^2} \vec{u} \quad (7)$$

Inversement l'action d'un point matériel sur une sphère est la même que si toute la masse de la sphère était concentrée en son centre.

#### 5. Mouvement d'un point dans un repère lié à la Terre

##### 5.1 - Hypothèses sur la Terre

En première approximation, on peut supposer que :

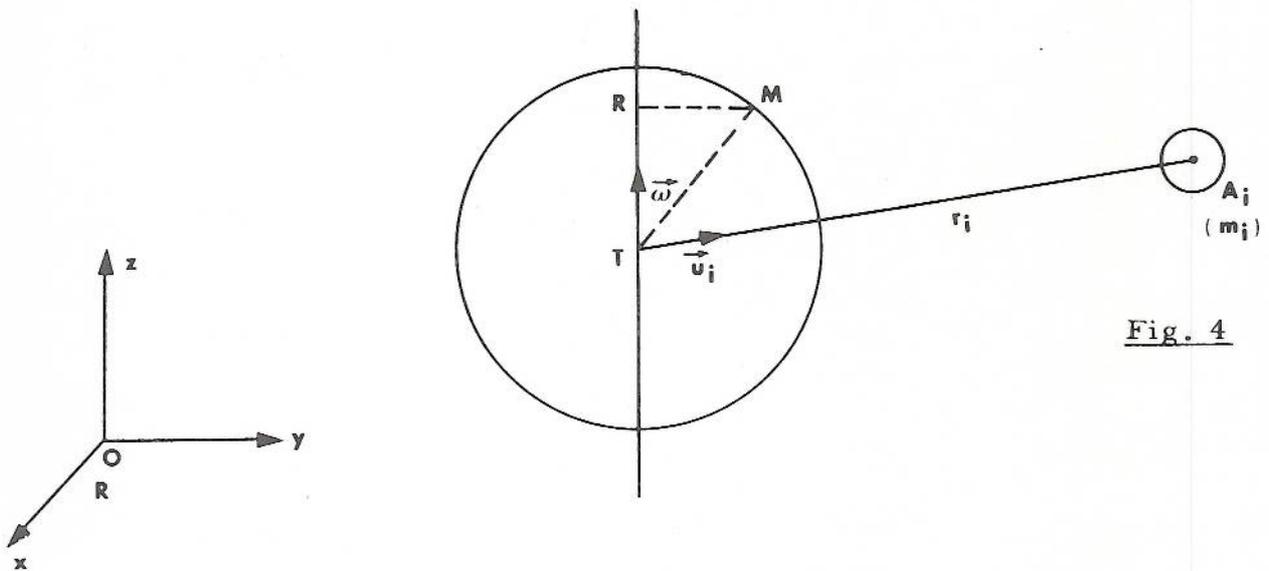
- la ligne des pôles a une direction fixe dans l'espace
- la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe est constante
- la Terre est assimilable à une sphère de masse  $m_T$  indéformable.

### 5.2 - Mouvement de la Terre

Compte tenu des hypothèses du paragraphe 5.1, l'accélération absolue d'un point lié à la Terre est, d'après (2) :

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_a(T) + \vec{\omega}_A (\vec{\omega}_A \overrightarrow{TM}) \quad (8)$$

où T est le centre de gravité de la Terre



On montre facilement que :  $\vec{\omega}_A (\vec{\omega}_A \overrightarrow{TM}) = -\omega^2 \overrightarrow{RM}$

Et d'après (6) :

$$m_T \vec{\gamma}_a(T) = \vec{F} \text{ extérieures.}$$

Les forces extérieures sont les attractions exercées par les astres. En assimilant chaque astre  $A_i$  à une sphère de masse  $m_i$  dont le centre est à la distance  $r_i$  de T, il vient :

$$\vec{F} \text{ extérieures} = \sum_i k \frac{m_T m_i}{r_i^2} \vec{u}_i \quad \text{d'après (7)}$$

d'où (9)  $\vec{\gamma}_a(T) = k \sum_i \frac{m_i}{r_i^2} \vec{u}_i = \vec{H}_a(T)$  : champ d'attraction astronomique en T.

### 5.3 - Mouvement d'un point matériel dans un repère ( $R_1$ ) lié à la Terre

Un point de masse  $m$  est soumis d'une part à des forces d'origine terrestre-telles que la pesanteur -  $\vec{F}_T$  et d'autre part au champ d'attraction astronomique  $\vec{H}_a$ .

En appliquant la relation (5) , il vient :

$$m \vec{v}_r (M) = \vec{F}_T (M) + m \vec{H}_a (M) - m \vec{v}_e - m \vec{v}_c$$

Mais, par définition,  $\vec{v}_e$  est l'accélération par rapport à ( R ) du point lié à la Terre coïncidant avec M à l'instant considéré .

$$\vec{v}_e (M) = \vec{v}_a (T) - \omega^2 \overrightarrow{RM} \text{ d'après (8)}$$

En remplaçant  $\vec{v}_a (T)$  par sa valeur tirée de (9), il reste :

$$\vec{v}_r (M) = \left( \frac{1}{m} \vec{F}_T (M) + \omega^2 \overrightarrow{RM} - \vec{v}_c \right) + \left( \vec{H}_a (M) - \vec{H}_a (T) \right) \quad (10)$$

## C H A P I T R E IV

---

### Théorie statique des marées

#### 1. Généralités

Nous savons maintenant déterminer l'expression de la force génératrice de la marée en un point en fonction du temps. Comment peut-on en déduire la marée en ce point ?

La mécanique des fluides nous permet actuellement de connaître le mouvement que prend un liquide soumis à des forces déterminées ; cependant l'appareil mathématique peut devenir rapidement extrêmement lourd à utiliser car la configuration de la masse liquide n'est pas simple. Néanmoins la théorie nous indique la marche à suivre et les hypothèses qu'on peut être amené à introduire n'ont en fait pour objet que de simplifier la résolution du problème.

Au contraire, à l'époque de Newton, la mécanique des fluides était encore embryonnaire et, pour déterminer les dénivellations dues à la force génératrice de la marée, il était nécessaire d'admettre a priori la façon dont les particules liquides répondent aux forces qui les sollicitent. L'hypothèse la plus simple consiste à considérer que la surface des mers est à tout instant en équilibre sous l'action des forces auxquelles elle est soumise. Une autre hypothèse simplifiant les calculs est de supposer que la Terre est sphérique et entièrement recouverte d'une couche liquide. La théorie qui en découle est dite statique parce qu'elle ne prend pas en considération le mouvement des particules.

#### 2. Calcul de la dénivellation

En l'absence d'astre perturbateur, la couche liquide entourant le globe serait en équilibre par rapport à ce dernier sous l'action de la pesanteur (en négligeant les forces internes) qui s'exprime (voir chapitre III) :

$$\vec{F}(M) = \vec{g}(M) + \omega^2 \vec{RM}$$

.../...

On peut démontrer que cette force dérive d'un potentiel  $W$  fonction des coordonnées du point  $M$ . Nous utiliserons dans la suite les coordonnées sphériques (Fig. 1)

- $a = TM$
- $L$  latitude de  $M$
- $G$  longitude de  $M$

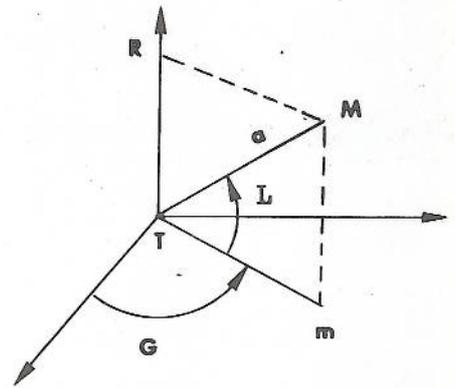


Fig. 1

La surface libre  $S$  de la couche liquide est confondue, à l'équilibre, avec une surface équipotentielle  $N$ , normale en tout point à  $\vec{F}$  et d'équation

$$(1) W(a, L, G) = C_0$$

L'action des astres déforme cette surface de niveau et un point  $M$  éprouve la dénivellation  $MM' = h$ , positive si  $S$  est au-dessus de  $N$ , négative dans le cas contraire (Fig. 2).

Dans la théorie statique, on admet que la masse fluide est à tout instant en équilibre sous l'action des forces qui la sollicitent, à savoir la pesanteur et la force génératrice de la marée. La surface  $S$  est encore une surface équipotentielle correspondant à une valeur constante de la somme des potentiels des forces en jeu.

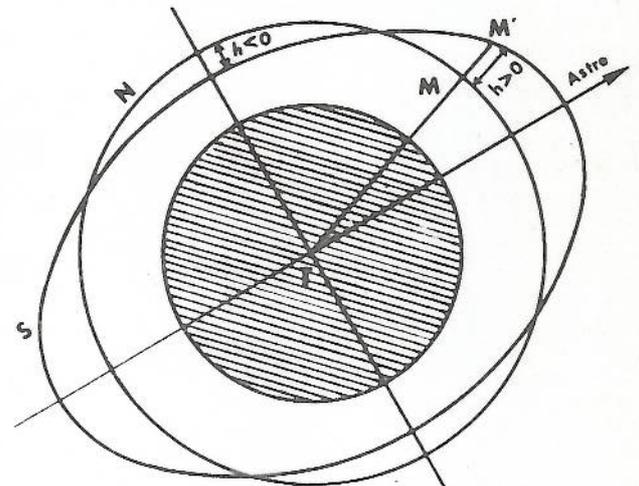


Fig. 2

Le potentiel de la pesanteur en  $M'$  est la somme du potentiel  $W(a + h, L, G)$  qui existerait en ce point s'il n'y avait pas de marée, la couche liquide étant limitée par  $N$ , et du potentiel  $U(a + h, L, G)$  produit en ce point par le bourrelet liquide d'épaisseur  $h$ .

En appelant  $V$  le potentiel de la force génératrice de la marée due à un astre perturbateur, l'équation de la surface  $S$  s'écrit :

$$(2) W(a + h, L, G) + U(a + h, L, G) + V(a + h, L, G) = C$$

Mais le déplacement  $h$  est très faible devant le rayon terrestre  $a$ . En première approximation, on pourra écrire :

$$U(a + h, L, G) \simeq 0$$

$$V(a + h, L, G) \simeq V(a, L, G)$$

$$W(a + h, L, G) \simeq W(a, L, G) + h \frac{\partial W}{\partial a}(a, L, G)$$

.....

En négligeant la force centrifuge  $\omega^2 \overrightarrow{RM}$  devant  $\overrightarrow{g}$ , il vient :

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \rho h - g$$

L'équation (2) s'écrit :

$$W(a, L, G) - g h + V(a, L, G) = C$$

D'après (1), on a donc :

$$h = \frac{V - (C - C_0)}{g}$$

Pour déterminer  $C - C_0$  on écrit que le volume de la couche liquide qui recouvre le globe est invariable, c'est-à-dire que le volume du bourrelet liquide est nul.

Soit  $dN$  un élément de la surface  $N$  :

$$\iint_N h \, dN = 0$$

$$\iint_N \frac{V}{g} \, dN - \iint_N \frac{C - C_0}{g} \, dN = 0$$

d'où :  $C - C_0 = \frac{1}{T} \iint_N V \, dN$ ,  $g$  étant pratiquement constant le long de  $N$  qui est assimilable à une sphère.

$T$  est la surface totale de la surface d'équilibre  $N$  :  $T = \iint_N dN$

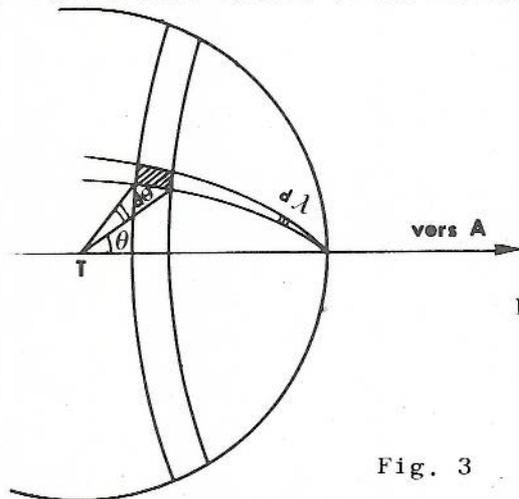


Fig. 3

Décomposons la surface  $N$  en quadrilatères curvilignes élémentaires compris entre deux petits cercles de rayon  $a \sin \theta$  et  $a \sin (\theta + d\theta)$  d'une part, et deux grands cercles dont les plans forment un dièdre d'angle  $d\lambda$  et d'arête  $TA$  d'autre part. Les côtés de ces quadrilatères ont pour valeur  $a \sin \theta d\lambda$  et  $a d\theta$  ; leur surface  $dN$  vaut donc :

$$dN = a^2 \sin \theta d\theta d\lambda$$

D'autre part le potentiel  $V$  est égal à  $K (3 \cos^2 \theta - 1)$  (voir chapitre III),  $K$  étant un facteur indépendant de  $\theta$ .

.../...

On aura donc :

$$\iint_N V \, dN = a^2 K \iint (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \, d\theta \, d\lambda$$

$$= K' \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \, d\theta, \text{ après intégration par rapport à } \lambda$$

Cette intégrale est nulle.

Les constantes  $C$  et  $C_0$  sont égales, ce qui signifie que l'astre perturbateur ne modifie pas la valeur du potentiel à la surface d'équilibre. La hauteur de la marée statique, comptée à partir de la surface d'équilibre, a pour expression

$$h = \frac{V}{g}$$

ou encore, en remplaçant  $V$  par sa valeur (voir chapitre III)

$$h = \frac{1}{2} a \frac{m}{m_T} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3 i^3 (3 \cos^2 \theta - 1)$$

ce qui devient, en posant  $\tau = \frac{m}{m_T} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3$

$$(3) \quad h = \frac{a}{2} i^3 \tau (3 \cos^2 \theta - 1)$$

ou  $h = h_0 (3 \cos^2 \theta - 1)$

avec  $h_0 = \frac{a}{2} i^3 \tau$

### 3. Etude de la marée statique

#### 3.1. Forme de la surface libre

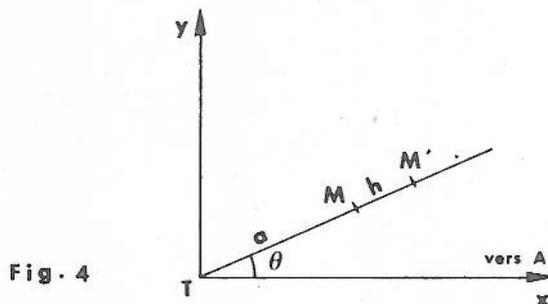


Fig. 4

La formule (3) signifie que la dénivellation  $h$  est la même pour tous les points ayant même distance zénithale  $\theta$  : la surface libre est de révolution autour de l'axe TA. Appelons  $T_x$  la direction TA et  $T_y$  une direction perpendiculaire. L'équation de la méridienne, section de S par le plan  $Txy$ , est :

$$x^2 + y^2 = (a + h)^2$$

$h$  étant très petit par rapport au rayon terrestre  $a$ , on peut écrire :

$$x^2 + y^2 \simeq a^2 + 2ah$$

D'autre part on a :

$$\cos \theta = \frac{x}{a + h}$$

.../...

$$\text{et } h = h_0 (3 \cos^2 \theta - 1) = h_0 \left( \frac{3 x^2}{(a+h)^2} - 1 \right) \approx \left( \frac{3 x^2}{a^2} - 1 \right) h_0$$

$$\text{D'où } x^2 + y^2 \approx a^2 + 2 a h_0 \left( \frac{3 x^2}{a^2} - 1 \right)$$

$$x^2 \left[ 1 - \frac{6 h_0}{a} \right] + y^2 \approx a^2 - 2 a h_0 = a^2 \left( 1 - \frac{2 h_0}{a} \right)$$

$$\frac{x^2}{1 + \frac{4 h_0}{a}} - \frac{y^2}{1 - \frac{2 h_0}{a}} \approx a^2$$

$$\text{Or } h_0 = \frac{a}{2} i^3 \tau$$

D'où l'équation approchée de la section méridienne :

$$\boxed{\frac{x^2}{1 + 2 i^3 \tau} + \frac{y^2}{1 - i^3 \tau} = a^2}$$

C'est l'équation d'une ellipse dont le grand axe est dirigé vers l'astre et dont l'excentricité est égale à  $\sqrt{3} i^3 \tau$ . La surface libre prend donc, en première approximation, la forme d'un ellipsoïde peu allongé. Le Soleil et la Lune donnent naissance à deux ellipsoïdes indépendants ; en raison de la petitesse des dénivellations, on admet qu'elles s'ajoutent algébriquement.

### 3.2. Influence du bourrelet liquide

La surface libre est tantôt au-dessus, tantôt au-dessous du niveau d'équilibre. Ces surélévations et ces dépressions constituent ce qu'on a appelé **plus haut le bourrelet liquide**. Nous avons négligé, jusqu'ici, l'influence de ce bourrelet.

Si on tient compte du potentiel  $U(a+h, L, G)$  du bourrelet liquide, on peut montrer que la hauteur de la marée statique s'écrit alors

$$h \approx \frac{V}{g} \frac{1}{1 - \frac{3}{5} \frac{d}{d_0}}$$

formule dans laquelle  $d_0$  est la densité du noyau solide supposé homogène et  $d$  la densité de l'eau de mer. Le rapport  $\frac{d}{d_0}$  étant sensiblement égal à  $\frac{1}{6}$  on

obtient pour  $h$  la valeur très approchée :

.../...

$$h \approx \frac{V}{g} \left( 1 + \frac{1}{10} \right)$$

La présence du bourrelet liquide augmente donc d'environ 10 % la hauteur de la marée statique.

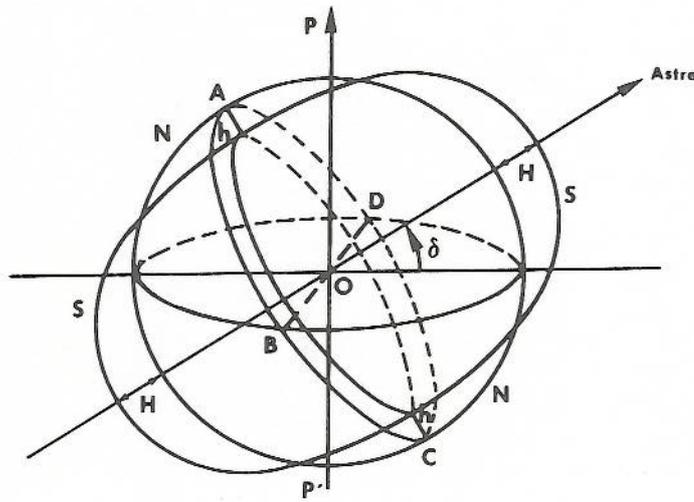


Fig. 5

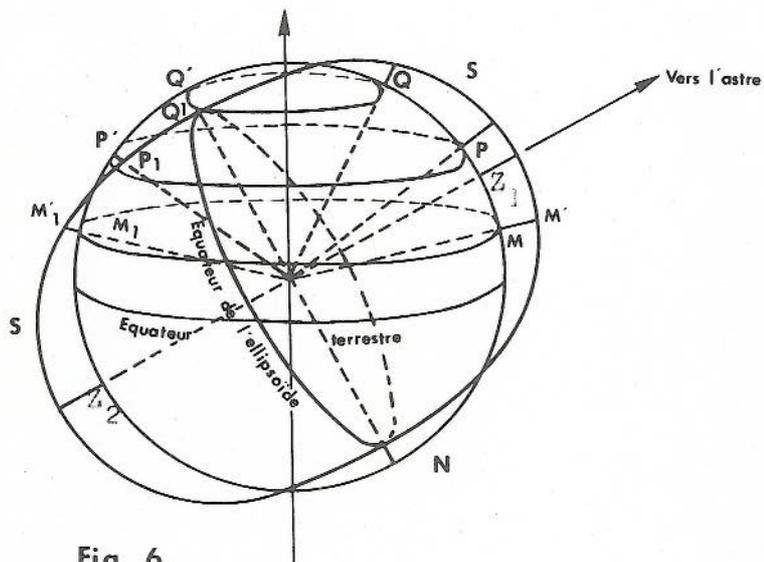


Fig. 6

### 3.3. Caractéristiques de la marée statique (fig. 5 et 6)

On appelle d'habitude la quantité  $h = \frac{V}{g}$  : marée statique théorique.

Pour un astre donné, elle est égale à :

$$h = \frac{a}{2} i^3 \tau (3 \cos^2 \theta - 1) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{m_T} \left( \frac{a}{r_0} \right)^3$$

Pour l'astre au zénith ou au nadir :  $\theta = 0$ , la marée statique est maximale et vaut :

$$h = ai^3 \tau = H$$

Pour les points du grand cercle ABCD, l'astre est à l'horizon ( $\theta = 90^\circ$ ) la marée statique est minimale et vaut :

$$h = - \frac{ai^3 \tau}{2} = - \frac{H}{2}$$

En prenant  $a = 6\,100$  km, on a  $H = 36$  cm  $h = -18$  cm pour la Lune. Le marnage maximum de la marée lunaire est donc de 54 cm environ. Le marnage de la marée solaire est au maximum de 25 cm environ. Au total, la marée statique luni-solaire ne dépasse pas le mètre, alors que, par exemple, sur les côtes de France les marnages observés varient entre 5 et 15 m.

L'ellipsoïde représentant la surface libre tourne avec l'astre autour de la Terre supposée immobile en un "jour" de l'astre (24 h 50 m pour la Lune, 24 h pour le Soleil). Pendant une durée d'un jour, la déclinaison et la distance peuvent, en première approximation, être considérées comme constantes.

En un lieu M (voir Fig. 6) il y a pleine mer MM' quand la distance zénithale est minimale c'est-à-dire quand l'astre passe au méridien. Pour les points d'un même méridien, les pleines mers sont inégales, la plus grande a lieu aux points  $Z_1$  et  $Z_2$  ( $\theta = 0$ ,  $h = ai^3 \tau$ ).

Les deux pleines mers d'une même journée sont inégales comme on le voit facilement en supposant l'ellipsoïde fixe et le point M tournant en sens inverse et décrivant un parallèle avec la vitesse horaire de l'astre : les deux pleines mers se produisent en M et  $M_1$  et ne sont pas égales. Lorsque la latitude du lieu est assez élevée, en P par exemple, la pleine mer inférieure P'P<sub>1</sub> peut être au-dessous du niveau d'équilibre.

Il y a basse mer en un lieu quand l'équateur de l'ellipsoïde y passe c'est-à-dire quand l'astre est à l'horizon ( $\theta = 90^\circ$ ). Les deux basses mers d'un même jour sont égales et les mêmes en tout point. Les instants de basses mers sont d'autant plus rapprochés (inégalité diurne en heure) que la latitude du lieu est plus élevée. Pour tous les points situés sur le parallèle QQ' les basses mers se confondent avec la pleine mer négative. Tous ces résultats peuvent se retrouver par le calcul en considérant le développement du potentiel en fonction des coordonnées horaires de l'astre. (voir chapitre 3, § 4.3)

### 3.4. Critique de la théorie statique

Les résultats du paragraphe précédent sont en contradiction avec l'observation tant au point de vue amplitude qu'au point de vue déphasage du phénomène. En effet la théorie statique néglige les mouvements des particules et les forces d'inertie. Newton avait pensé qu'on pourrait tenir compte de l'inertie en introduisant un retard de trois heures mais cette approche, tout à fait arbitraire, n'a pas abouti.

Cependant, la théorie statique n'est pas à rejeter complètement. En effet la marée statique théorique est, en introduisant les coordonnées horaires de l'astre (voir chapitre 3, § 4.3.)

$$h = \frac{3}{4} a \tau i^3 \left[ \frac{(1-3 \sin^2 L)(1-3 \sin^2 \delta)}{3} + \sin 2L \sin 2\delta \cos AH + \cos^2 L \cos^2 \delta \cos 2AH \right]$$

Nous avons ainsi décomposé la marée due à un astre en trois marées partielles qui se superposent : une marée à longue période ne dépendant que de la déclinaison de l'astre, et deux marées à courte période l'une diurne, l'autre semi-diurne. En raison de la rapidité du mouvement les deux dernières ne relèvent pas de la théorie statique, mais pour la marée à longue période les déplacements sont suffisamment lents pour que l'équilibre puisse être considéré comme réalisé à tout instant, sans être pratiquement affecté par l'inertie.

Pour une raison analogue la théorie statique des marées s'applique aux marées de la partie solide du globe. Aucun courant ne pouvant en effet prendre naissance au sein du noyau solide, les particules n'ont à se déplacer que de quelques décimètres et l'équilibre est toujours atteint, même dans le cas des marées de courte période. D'ailleurs une bille d'acier ayant les dimensions de la Terre présenterait une vibration fondamentale de 1 à 2 heures, période par rapport à laquelle l'action luni-solaire, même semi-diurne, peut être considérée comme longue, ce qui légitime l'emploi de la théorie de l'équilibre.

### 4. Marées terrestres

Le phénomène des marées terrestres représente, d'une façon générale, la réponse de la Terre solide à la force génératrice des marées qui se compose en chaque point de la surface avec la pesanteur.

La composante verticale s'ajoute algébriquement à la pesanteur, à laquelle elle communique une légère variation périodique que des gravimètres très sensibles sont susceptibles de déceler.

Cette variation entraîne à son tour un déplacement de la surface de la Terre, qui n'est pas absolument rigide, ce qui amplifie la variation observée de la pesanteur.

La composante horizontale entraîne une déviation de la verticale dont la valeur maximale théorique (astre à 45° de l'horizon) est de 0''017 pour la Lune et de 0''008 pour le Soleil. Mais la surface de la Terre se déforme simultanément de façon à rester en chaque point normale à la verticale, ce qui atténue la déviation observée.

Les rapports entre les amplitudes observées et les amplitudes théoriques relatives à une Terre rigide s'expriment à partir des trois nombres de Love  $h, k, \ell$  qui traduisent les propriétés d'élasticité de la Terre. Ces nombres permettent une description générale de la réponse de la Terre aux forces perturbatrices, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à des informations sur l'intérieur de la Terre.

$h$  est le rapport de la déformation radiale observée de la Terre à la déformation théorique  $\frac{V}{g}$

$k$  représente le rapport entre le potentiel additionnel  $u$  dû aux déformations de la surface et le potentiel générateur  $V$

$\ell$  est le rapport entre le déplacement horizontal observé et le déplacement horizontal théorique.

Des mesures de gravité à l'aide de gravimètres permettent d'atteindre le facteur  $1 + h - \frac{3}{2} k$  tandis que des mesures de déviation de la verticale à l'aide de pendules horizontaux fournissent une estimation du facteur  $1 + k - h$ . D'autres méthodes de calcul sont basées sur l'étude des irrégularités du mouvement de rotation de la Terre. On admet en général que  $h \simeq 0,6$  et  $k \simeq 0,3$ ,

d'où  $1 + k - h \simeq 0,7$

#### 5. Marées océaniques à longue période

L'étude des marées océaniques à longue période permet également d'atteindre le facteur  $(1 + k - h)$ .

Sur un globe entièrement couvert d'eau, on peut considérer que l'équilibre est constamment réalisé dans le cas des marées à longue période, en raison de la lenteur relative des déplacements des particules. Pour la même raison, la présence des masses continentales perturbe très peu le phénomène et les marées observées doivent s'écarter très peu de la marée théorique. Cependant celle-ci est calculée dans le cas d'un globe rigide ; or, la Terre présentant une certaine élasticité : il existera un désaccord entre l'observation et la théorie. Cette conception est due à DARWIN qui en fit une application systématique, mais déjà LAPLACE avait remarqué, en étudiant les marées de Brest, que l'écart entre les niveaux moyens journaliers aux solstices et aux équinoxes n'était que de 26 millimètres, alors qu'en théorie, il aurait dû s'élever à 43 millimètres.

On interprète le désaccord en remarquant que la marée océanique apparente est une marée relative puisqu'elle est rapportée à l'écorce, elle-même soumise à la marée terrestre.

La marée océanique réelle est égale à  $(1 + k)$  fois la marée statique théorique en raison de l'augmentation du potentiel perturbateur sous l'effet des déformations du globe ; d'autre part, la marée terrestre est égale à  $h$  fois la marée théorique. Nous pouvons donc écrire :

$$\text{- marée océanique réelle} = (1 + k) \text{ marée théorique}$$

$$\text{- marée terrestre} = h \text{ marée théorique}$$

$$\text{d'où - marée océanique apparente} = (1 + k - h) \text{ marée théorique.}$$

L'observation des marées à longue période peut donc nous permettre de déterminer la valeur du rapport  $1 + k - h$ , mais non celle du seul paramètre  $h$  qui caractérise la marée terrestre.

En 1881, DARWIN, analysant les marées semi-mensuelles et mensuelles déduites de 33 années d'observations effectuées dans 14 ports d'Europe et des Indes, trouva que leur amplitude moyenne était très sensiblement égale aux  $2/3$  de celle des marées théoriques ; plus précisément il obtint un rapport d'amplitude égal à 0,68. Une vingtaine d'années après, l'Allemand SCHWEYDAR dépouilla et analysa de la même manière 194 années d'observations relevées dans 43 ports dispersés à la surface du globe et fut conduit à des valeurs analogues pour le rapport des amplitudes : 0,63 à l'aide des marées semi-mensuelles ; 0,61 avec les marées mensuelles. Il convient cependant de remarquer que dans le calcul de la marée théorique, les deux auteurs ont négligé l'action du bourrelet liquide dont nous avons vu que le potentiel a pour effet d'augmenter de 10 % environ la hauteur de la marée statique. Les valeurs précédentes de  $1 + k - h$  devraient donc être diminuées dans la même proportion.

#### 6. Influence des continents

Sous la forme exposée plus haut, la théorie statique des marées peut être considérée tout au plus comme donnant l'allure générale du phénomène, mais elle est absolument insuffisante pour des applications pratiques, c'est-à-dire pour conduire à des prédictions acceptables de la marée.

En dehors de l'hypothèse même de l'équilibre, une des raisons du désaccord avec la réalité réside dans le fait que la théorie statique néglige l'existence des continents. Près de deux siècles après Newton, W. THOMSON (Lord KELVIN) pensa qu'on pourrait apporter à la théorie une amélioration notable en évitant cette omission.

Nous avons trouvé plus haut la relation suivante entre le potentiel et la dénivellation :

$$V - gh = C - C_0 \text{ avec } C - C_0 = \frac{1}{T} \iint V \, dN$$

et nous avons établi que si les mers recouvraient tout le globe la quantité  $C - C_0$  serait nulle.

Si on veut tenir compte de la répartition des mers sur le globe, il faut reprendre l'intégration en l'appliquant seulement à toute la surface mouillée. En appelant AH l'angle horaire de l'astre, AH<sub>0</sub> l'angle horaire par rapport à

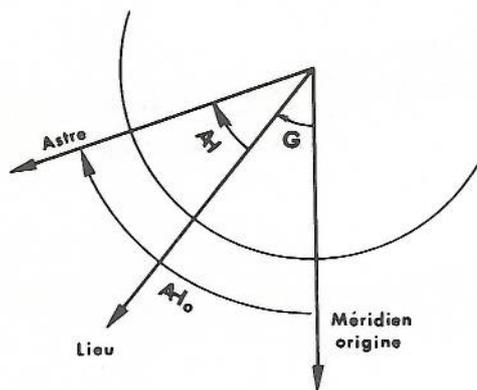


Figure 7

un méridien origine et G la longitude du lieu comptée positivement vers l'Ouest, on peut écrire :

$$AH = AH_0 - G \quad (\text{Figure 7})$$

En substituant cette expression à AH dans le développement du potentiel en fonction des coordonnées horaires, nous obtenons des termes en  $\delta$  et AH dont les coefficients sont des fonctions des coordonnées géographiques L et G des points

considérés. L'expression de C - C<sub>0</sub> résulte de l'intégration de ces coefficients pour l'ensemble N des mers.

On trouve ainsi :

$$C - C_0 = \frac{3}{4} g a \tau i^3 \left[ \mathcal{A} \frac{1 - 3 \sin^2 \delta}{3} + \mathcal{B} \sin 2\delta \cos AH_0 + \mathcal{C} \sin 2\delta \sin AH_0 + \mathcal{D} \cos^2 \delta \cos 2AH_0 + \mathcal{E} \cos^2 \delta \sin 2AH_0 \right]$$

en désignant par les lettres  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ , les intégrales suivantes :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{T} \iint (1 - 3 \sin^2 L) dN \quad \mathcal{B} = \frac{1}{T} \iint \sin 2L \cos G dN$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{T} \iint \sin 2L \sin G dN \quad \mathcal{D} = \frac{1}{T} \iint \cos^2 L \cos 2G dN$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{T} \iint \cos^2 L \sin 2G dN$$

Ces cinq coefficients, appelés par KELVIN coefficients de distribution des mers, seraient nuls en l'absence de continents et peuvent être calculés approximativement à l'aide d'une mappemonde pour la surface totale des mers. Il est d'ailleurs plus rapide de les calculer pour les continents qui sont environ deux fois moins étendus et d'en changer le signe. Ils ont été calculés par DARWIN qui a dû faire des hypothèses sur la distribution des mers dans l'Antarctique alors très mal connu. Ces coefficients sont très petits ; seul  $\mathcal{A}$  varie avec les hypothèses faites :

$$\text{pour } T = 0,72 \quad , \quad \mathcal{A} = 0,015$$

$$\text{pour } T = 0,77 \quad , \quad \mathcal{A} = 0,005$$

$$\mathcal{B} = -0,04$$

$$\mathcal{C} = 0,06$$

$$\mathcal{D} = 0,03$$

$$\mathcal{E} = 0,05$$

Partant de l'expression ainsi trouvée pour C - C<sub>0</sub>, on en déduit pour la dénivellation  $h = \frac{V - (C - C_0)}{g}$  la valeur suivante :

$$h = \frac{3}{4} a \tau i^3 \left[ \begin{aligned} & \frac{1 - 3 \sin^2 \delta}{3} (1 - 3 \sin^2 L \cdot \mathcal{A}) \\ & + \sin 2\delta \cos AH_0 (\sin 2L \cos G \cdot \mathcal{B}) + \sin 2\delta \sin AH_0 (\sin 2L \sin G \cdot \mathcal{C}) \\ & + \cos^2 \delta \cos 2AH_0 (\cos^2 L \cos 2G \cdot \mathcal{D}) + \cos^2 \delta \sin 2AH_0 (\cos^2 L \sin 2G \cdot \mathcal{E}) \end{aligned} \right]$$

expression qu'on peut simplifier en posant :

$$1 - 3 \sin^2 L \cdot \mathcal{A} = \lambda_0$$

$$\sin 2L \cos G \cdot \mathcal{B} = \lambda_1 \cos (G + \epsilon_1)$$

$$\sin 2L \sin G \cdot \mathcal{C} = \lambda_1 \sin (G + \epsilon_1)$$

$$\cos^2 L \cos 2G \cdot \mathcal{D} = \lambda_2 \cos 2(G + \epsilon_2)$$

$$\cos^2 L \sin 2G \cdot \mathcal{E} = \lambda_2 \sin 2(G + \epsilon_2)$$

En se rappelant que  $AH = AH_0 - G$  on obtient finalement :

$$h = \frac{3}{4} a \tau i^3 \left[ \lambda_0 \frac{1 - 3 \sin^2 \delta}{3} + \lambda_1 \sin 2\delta \cos (AH - \epsilon_1) + \lambda_2 \cos^2 \delta \cos 2(AH - \epsilon_2) \right]$$

Les cinq paramètres ainsi introduits  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont des fonctions des coefficients de distribution, appelés aussi constantes universelles, et des coordonnées géographiques du point considéré, mais ils ne dépendent pas de l'astre : ils caractérisent donc le point auquel s'applique le calcul de la dénivellation. On peut remarquer, d'après l'ordre de grandeur des constantes universelles, que  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$  diffèrent généralement peu respectivement de  $1 - 3 \sin^2 L, \sin 2L$  et  $\cos^2 L$ , tandis que les déphasages  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont eux-mêmes très petits.

Ces paramètres sont les mêmes pour la marée lunaire et la marée solaire, de sorte que la dénivellation totale dépend seulement de cinq constantes locales théoriquement calculables comme nous l'avons indiqué. Les marées déterminées par cette formule ne s'accordent pas encore de façon satisfaisante avec l'observation. Aussi, supposant que la discordance résulte de causes actuellement impossibles à expliquer théoriquement, on préfère déduire les constantes locales d'une série d'observations préalables au lieu de les obtenir par le calcul ; il est même possible d'admettre des constantes locales différentes pour les marées lunaire et solaire et de faire ainsi dépendre la dénivellation totale de dix paramètres.

Les particularités de la marée peuvent s'expliquer plus facilement. Les pleines mers de la marée semi-diurne ne se produisent plus au moment du passage des astres au méridien mais avant ou après selon le signe de  $\epsilon_2$ , quantité qui ne dépend que du lieu. De même pour les pleines mers de la marée diurne.

Si les retards  $\epsilon_2$  étaient les mêmes pour la Lune et le Soleil, les termes lunaire et solaire semi-diurnes seraient en concordance de phase et s'ajouteraient le jour de la syzygie, ce qui est en désaccord avec l'observation : c'est l'une des raisons motivant l'emploi de constantes différentes pour la Lune et le Soleil, constantes déterminées empiriquement.

La formule ainsi modifiée est sensiblement la même que celle obtenue par Laplace, à partir d'hypothèses fondamentalement différentes.

THEORIE DYNAMIQUE - FORMULE DE LAPLACE

1. Généralités

1.1. Nécessité d'une théorie dynamique

L'hypothèse initiale de la théorie statique des marées, à savoir que la couche liquide prend à chaque instant la figure d'équilibre correspondant à la position des astres à cet instant, est inconciliable avec la rapidité du mouvement des astres.

On peut montrer, en effet, que la force génératrice des marées entretient dans les océans des oscillations des particules d'eau qui décrivent des trajectoires sensiblement elliptiques situées dans un plan vertical et très allongées. Le déplacement vertical constitue la marée tandis que le déplacement horizontal correspond aux courants de marée. Seule une théorie dynamique, prenant en considération les forces d'inertie peut rendre compte de ces oscillations.

1.2. Principes de la théorie dynamique

La théorie dynamique repose sur deux hypothèses fondamentales énoncées par Laplace.

1.2.1. Principe des oscillations forcées

"L'état d'un système de corps dans lequel les conditions primitives du mouvement ont disparu par les résistances qu'il éprouve, est périodique comme les forces qui l'animent".

Les oscillations que prend ainsi le système sont dites "oscillations forcées". Elles s'opposent aux oscillations "libres", "propres" ou "naturelles" prises par le système écarté de sa position d'équilibre et soumis à la seule action de la pesanteur. Les périodes de ces oscillations libres ne dépendent que des propriétés mécaniques du système, c'est-à-dire, dans le cas des bassins océaniques, de leurs dimensions. Les oscillations libres s'éteignent peu à peu sous l'action des frottements.

.../...

### 1.2.2. Principe de la superposition des petits mouvements

"Le mouvement total d'un système agité par de très petites forces est la somme des mouvements partiels que chaque force lui eût imprimés séparément".

### 1.3. Validité des principes de la théorie dynamique

Les hypothèses introduites par Laplace sont légitimes lorsque les équations qui régissent le mouvement peuvent être linéarisées.

On montre que l'existence de termes non linéaires entraîne l'apparition d'oscillations à des fréquences qui sont des combinaisons linéaires des fréquences de la force excitatrice. C'est le cas notamment des marées en eau peu profonde. Il faudra alors apporter des modifications à la théorie déduite des deux principes ci-dessus (voir chapitre VI).

### 1.4. Théorie dynamique des marées

Il est possible de décomposer le potentiel générateur des marées en une série illimitée de termes rigoureusement périodiques dont les fréquences se déduisent des propriétés des mouvements des astres. A chacun de ces termes élémentaires correspond une force de même période engendrant une marée partielle qui a également même période. La hauteur de l'eau est obtenue en faisant la somme de ces marées partielles.

## 2. Etablissement de la formule de Laplace

### 2.1. Développement du potentiel

Posons :

$G$	longitude du lieu (comptée positivement vers l'Ouest)
$L$	latitude du lieu (positive dans l'hémisphère Nord ; négative dans
$t$	heure sidérale au méridien origine <span style="float: right;">l'hémisphère Sud)</span>
$\omega_T$	vitesse angulaire de rotation de la Terre
$\alpha_p$	ascension droite de l'astre $p$ (Lune ou Soleil)
$\delta_p$	déclinaison de l'astre $p$
$AH_p$	angle horaire de l'astre $p$

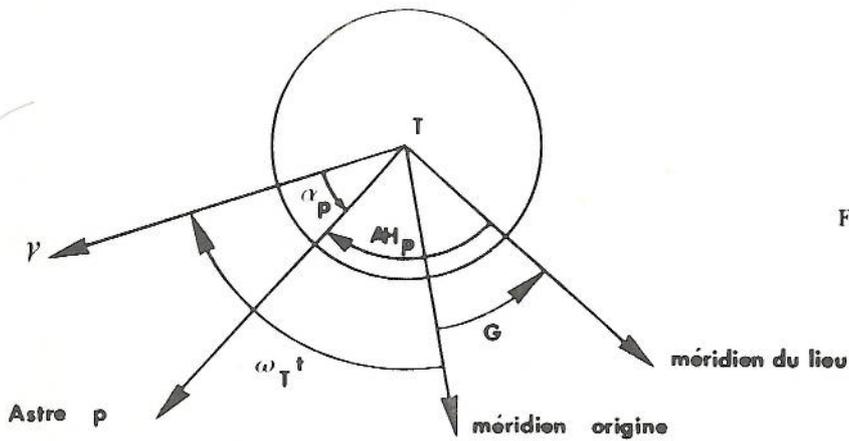


Fig. 1

On peut écrire (fig. 1)

$$AH_p = (\omega_T t - G) - \alpha_p$$

Considérons le terme semi-diurne du potentiel générateur dû à l'astre  $p$  (voir chapitre III):

$$V_2 = C i_p^3 \cos^2 L \cos^2 \delta_p \cos 2 AH_p$$

En remplaçant  $AH_p$  par sa valeur, on obtient :

$$V_2 = C \cos^2 L \{ i_p^3 \cos^2 \delta_p \cos 2 \alpha_p \cos 2 (\omega_T t - G) + i_p^3 \cos^2 \delta_p \sin 2 \alpha_p \sin 2 (\omega_T t - G) \}$$

Posons  $K_C = i_p^3 \cos^2 \delta_p \cos 2 \alpha_p$ ,  $K_S = i_p^3 \cos^2 \delta_p \sin 2 \alpha_p$

$$\text{et } x = 2(\omega_T t - G)$$

$K_C$  et  $K_S$  sont indépendants du lieu et du mouvement de rotation de la Terre. Ils sont périodiques et de période  $T_p$ , durée de révolution de l'astre. On peut les développer en séries de Fourier (voir appendice 1).

$$K_C = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n \cos(n \omega_p t) + B_n \sin(n \omega_p t) \right\}$$

$$K_S = A'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A'_n \cos(n \omega_p t) + B'_n \sin(n \omega_p t) \right\}$$

$$\text{avec } \omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$$

$$K_C \cos x + K_S \sin x = A_0 \cos x + A'_0 \sin x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n \cos x \cos n \omega_p t + B_n \cos x \sin n \omega_p t \right. \\ \left. + A'_n \sin x \cos n \omega_p t + B'_n \sin x \sin n \omega_p t \right\}$$

Les termes de rang  $n$  peuvent se décomposer :

$$A_n \cos x \cos n \omega_p t = \frac{1}{2} A_n \cos(x - n \omega_p t) + \frac{1}{2} A_n \cos(x + n \omega_p t)$$

$$B_n \cos x \sin n \omega_p t = -\frac{1}{2} B_n \sin(x - n \omega_p t) + \frac{1}{2} B_n \sin(x + n \omega_p t)$$

$$A'_n \sin x \cos n \omega_p t = \frac{1}{2} A'_n \sin (x - n \omega_p t) + \frac{1}{2} A'_n \sin (x + n \omega_p t)$$

$$B'_n \sin x \sin n \omega_p t = \frac{1}{2} B'_n \cos (x - n \omega_p t) - \frac{1}{2} B'_n \cos (x + n \omega_p t)$$

et se regrouper :

$$\frac{1}{2} (A_n + B'_n) \cos (x - n \omega_p t) + \frac{1}{2} (A'_n - B_n) \sin (x - n \omega_p t) = R_{2np} \cos (x - n \omega_p t + \epsilon_{2np})$$

$$\frac{1}{2} (A_n - B'_n) \cos (x + n \omega_p t) + \frac{1}{2} (B'_n + A'_n) \sin (x + n \omega_p t) = R_{2(-n)p} \cos (x + n \omega_p t + \epsilon_{2(-n)p})$$

et :

$$A_0 \cos x + A'_0 \sin x = R_{20p} \cos (x + \epsilon_{20p})$$

Finalement :

$$V_2 = C \cos^2 L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{2np} \cos \left\{ (2 \omega_T - n \omega_p) t - 2G + \epsilon_{2np} \right\}$$

De même, on peut décomposer le terme diurne :

$$V_1 = C \sin 2L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{1np} \cos \left\{ (\omega_T - n \omega_p) t - G + \epsilon_{1np} \right\}$$

et le terme à longue période :

$$V_0 = C \left( \sin^2 L - \frac{1}{3} \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{0np} \cos (n \omega_p t + \epsilon_{0np})$$

## 2.2. Calcul de la hauteur d'eau

Le potentiel générateur est décomposé en une série de termes

$$C_{lnp} \cos (q_{lnp} t - K_{lnp}) \quad (l = 0, 1, 2, -\infty < n < +\infty)$$

En appliquant les principes énoncés au § 1.2, on en déduit l'expression de la hauteur d'eau :

$$h_p(t) = \sum_{l=0}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{lnp} \cos (q_{lnp} t - K_{lnp} - \varphi_{lnp})$$

où les amplitudes  $H_{lnp}$  et les déphasages  $\varphi_{lnp}$  sont des inconnues à déterminer.

On peut regrouper les termes issus respectivement de  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  à partir des hypothèses suivantes :

- a) les amplitudes  $H_{lnp}$  sont proportionnelles aux amplitudes théoriques  $C_{lnp}$  et le coefficient de proportionnalité dépend de l'astre :
- $$H_{lnp} = k_{lp} C_{lnp}$$

- b) les déphasages  $\varphi_{lnp}$  varient linéairement avec les vitesses angulaires  $q_{lnp}$

$$\varphi_{lnp} = l \lambda_l + q_{lnp} T_l$$

.....

c) la théorie statique s'applique pour les termes à longue période :

$$\lambda_0 = T_0 = 0$$

La hauteur d'eau due à l'astre p a alors pour expression :

$$\begin{aligned} h_p(t) = & k_{0p} C \left( \sin^2 L - \frac{1}{3} \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{0np} \cos(n\omega_p t + \epsilon_{0np}) \\ & + k_{1p} C \sin 2L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{1np} \cos \left\{ \left( \frac{\omega_p}{T} - n\omega_p \right) (t - T_1) - G + \epsilon_{1np} - \lambda_1 \right\} \\ & + k_{2p} C \cos^2 L \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{2np} \cos \left\{ \left( 2\frac{\omega_p}{T} - n\omega_p \right) (t - T_2) - 2G + \epsilon_{2np} - 2\lambda_2 \right\} \end{aligned}$$

Soit, en posant :

$$\begin{aligned} B_{0p} &= k_{0p} C \left( \sin^2 L - \frac{1}{3} \right) \\ B_{1p} &= k_{1p} C \sin 2L \\ B_{2p} &= k_{2p} C \cos^2 L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_p(t) = & B_{0p} i_p^3(t) \left( \sin^2 \delta_p(t) - \frac{1}{3} \right) + B_{1p} i_p^3(t - T_1) \sin 2\delta_p(t - T_1) \cos(AH_p(t - T_1) - \lambda_1) \\ & + B_{2p} i_p^3(t - T_2) \cos^2 \delta_p(t - T_2) \cos 2(AH_p(t - T_2) - \lambda_2) \end{aligned}$$

La hauteur d'eau à l'instant t est obtenue en prenant les éléments astronomiques :

- au même instant pour les termes à longue période
- à l'instant  $t - T_1$  pour les termes diurnes
- à l'instant  $t - T_2$  pour les termes semi-diurnes

$T_1$  et  $T_2$  sont respectivement l'âge de la marée diurne et l'âge de la marée semi-diurne

L'expression relative à l'action de la Lune ( $p = 1$ ) et du Soleil ( $p = 2$ ) dépend de dix constantes :

$$T_1, T_2; \lambda_1 \text{ et } \lambda_2$$

$$B_{01}, B_{02}; B_{11}, B_{12}; B_{21} \text{ et } B_{22}$$

à déduire des observations.

### 3 - Etude de la marée au cours d'une journée à l'aide de la formule de Laplace

#### 3.1 - Généralités

Dans l'étude de la marée au cours d'une journée, on peut négliger les termes à longue période, même si leur amplitude n'est pas très petite, car ils ont seulement pour effet, en raison de la lenteur des mouvements correspondants, de décaler d'une même quantité les hauteurs des pleines et basses mers d'une même journée sans en modifier les heures.

Nous supposons donc dans la suite que la hauteur d'eau par rapport au "niveau moyen" (somme du terme constant et des termes à longue période) est exprimée uniquement par les termes diurnes et semi-diurnes lunaire et solaire de la formule de Laplace.

#### 3.2 - Variations des éléments astronomiques

##### 3.2.1 - Angles horaires

L'angle horaire  $AH_1$  de la Lune ne varie pas tout à fait d'une manière proportionnelle au temps : les angles horaires sont en effet comptés suivant l'équateur, alors que la Lune décrit une orbite inclinée de  $18$  à  $28^\circ$  sur l'équateur. En outre, elle ne la décrit pas d'un mouvement uniforme mais suivant la loi des aires. Enfin, son mouvement est l'objet de perturbations appréciables dues notamment au Soleil. La durée du jour lunaire est en moyenne de  $24$  h  $50$  mn mais les écarts peuvent dépasser  $10$  mn en plus ou en moins. Même à l'échelle de la journée, le mouvement ne peut être considéré comme uniforme dès qu'on recherche une certaine précision. En première approximation, on peut cependant se contenter de considérer une Lune "moyenne" dont l'angle horaire augmente de  $14,5''$  par heure de temps moyen :

$$\frac{d AH_1}{dt} = 14,5''/h$$

Les variations du mouvement du Soleil sont plus petites que celles du mouvement de la Lune et on peut adopter une variation de l'angle horaire de  $15''$  par heure temps moyen :

$$\frac{d AH_2}{dt} = 15''/h$$

La différence  $\omega = AH_2 - AH_1$  augmente de  $0,5''$  par heure ( $\frac{d\omega}{dt} = 0,5''/h$ )

La valeur de  $\omega$  exprimée en jours représente l'âge de la Lune.

##### 3.2.2 - Déclinaisons

La déclinaison de la Lune peut varier entre  $0$  et  $\pm 28^\circ 35'$  en une semaine avec une vitesse maximum de  $0,2^\circ/h$  lors du passage dans le plan de l'équateur.  $\sin 2\delta_1$  varie entre  $0$  et  $\pm 0,84$  tandis que  $\cos^2 \delta_1$  varie entre  $1$  et  $0,77$

La déclinaison du Soleil varie entre  $0$  et  $\pm 23^\circ 26'$  en trois mois avec une vitesse maximum de  $0,02^\circ/h$  lors des équinoxes.  $\sin 2\delta_2$  varie entre  $0$  et  $\pm 0,73$  tandis que  $\cos^2 \delta_2$  varie entre  $1$  et  $0,84$

### 3.2.3 - Distance

Dans un mouvement képlérien sur une orbite elliptique de demi grand axe  $a$  et d'excentricité  $e$ , la valeur moyenne du rayon vecteur par rapport au temps est  $a \left(1 + \frac{e^2}{2}\right)$ . Le rapport  $i = \frac{r_0}{r}$  varie donc entre  $\frac{1+e^2/2}{1+e}$  et  $\frac{1+e^2/2}{1-e}$ .  
 Pour la Lune,  $i_1^3$  varie de 0,85 à 1,19 en deux semaines ; pour le Soleil  $i_2^3$  varie de 0,95 à 1,05 en six mois.

### 3.3 - Expression de la hauteur d'eau

Pour simplifier la suite, il est utile d'amener les éléments astronomiques à correspondre à la même heure que la hauteur d'eau. Compte tenu des conclusions du paragraphe 3.2, nous négligeons les variations de  $\delta_1, \delta_2, i_1$ , et  $i_2$  pendant les durées  $T_1$  ou  $T_2$  et nous nous limitons au terme linéaire en fonction du temps dans l'expression des angles horaires :

$$\begin{aligned} i_p^3(t-T_j) &= i_p^3(t) \\ \delta_p(t-T_j) &= \delta_p(t) \\ AH_p(t-T_j) &= AH_p(t) - T_j \frac{dAH_p}{dt} \end{aligned}$$

pour  $p = 1, 2$  ;  $j = 1, 2$

avec  $\frac{dAH_1}{dt}$  et  $\frac{dAH_2}{dt}$  constants

Posons

$$\begin{aligned} \mu_{jp} &= \lambda_j + T_j \frac{dAH_p}{dt} = \text{constante} \\ \text{et } A_{1p} &= B_{1p} i_p^3 \sin 2\delta_p \quad ; \quad A_{2p} = B_{2p} i_p^3 \cos^2 \delta_p \end{aligned}$$

L'expression de la hauteur d'eau à l'instant  $t$  devient :

$$h = A_{11} \cos(AH_1 - \mu_{11}) + A_{12} \cos(AH_2 - \mu_{12}) + A_{21} \cos 2(AH_1 - \mu_{21}) + A_{22} \cos 2(AH_2 - \mu_{22})$$

où les  $\mu_{jpp}$  sont des constantes et tous les éléments sont pris au même instant  $t$ .

Les amplitudes  $A_{jp}$  varient avec  $i_p$  et  $\delta_p$  dans les limites indiquées ci-dessous.

Pour le Soleil, il faut tenir compte du fait qu'il ne peut être périégée aux équinoxes, ni apogée aux solstices : les valeurs extrêmes de  $i_2^3 \cos^2 \delta_2$  ne sont pas atteintes.

Amplitude	Minimum	Maximum
$A_{11}$	0	$+ B_{11}$
$A_{12}$	0	$+ 0,77 B_{12}$
$A_{21}$	$0,655 B_{21}$	$1,19 B_{21}$
$A_{22}$	$0,80 B_{22}$	$1,01 B_{22}$

On négligera, dans la suite, les variations des amplitudes au cours d'une journée.

### 3.4 - Etude de la marée semi-diurne seule

#### 3.4.1 - Détermination approchée des pleines et basses mers

La hauteur d'eau a pour expression :

$$h = A_{21} \cos 2(AH_1 - \mu_{21}) + A_{22} \cos 2(AH_2 - \mu_{22})$$

Posons :

$$\alpha_2 = \mu_{22} - \mu_{21} = T_2 \frac{d\omega}{dt}$$

$$h = (A_{21} + A_{22} \cos 2(\omega - \alpha_2)) \cos 2(AH_1 - \mu_{21}) - A_{22} \sin 2(\omega - \alpha_2) \sin 2(AH_1 - \mu_{21})$$

En introduisant :

$$R_2 = \sqrt{A_{21}^2 + A_{22}^2 + 2A_{21}A_{22} \cos 2(\omega - \alpha_2)}$$

$$p_2 = -\frac{1}{2} \text{Arc cotg} \left( \frac{A_{21} + A_{22} \cos 2(\omega - \alpha_2)}{A_{22} \sin 2(\omega - \alpha_2)} \right)$$

Il vient

$$h = R_2 \cos 2(AH_1 - \mu_{21} - p_2)$$

Si on néglige, en première approximation, les variations de  $\omega = AH_2 - AH_1$  au cours de la journée, on voit que lorsque  $AH_1$  varie de 24 heures au cours d'un jour lunaire,  $h$  passe par deux maximums égaux à  $R_2$  pour  $AH_1 = \mu_{21} + p_2 + k\pi$  et par deux minimums égaux à  $-R_2$  pour  $AH_1 = \mu_{21} + p_2 + \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k = 0$  ou  $1$ ).

Dans la réalité, la variation des éléments astronomiques au cours de la journée entraîne la variation de  $R_2$  et  $p_2$  et perturbe le phénomène. Pour prédire plus exactement les pleines et basses mers, il est nécessaire de tenir compte des variations de  $\omega$  au cours de la journée.

#### 3.4.2 - Heures des pleines et basses mers

Les extremums de  $h$  sont donnés par :

$$\frac{dh}{dt} = 0$$

$$\text{Soit } -2A_{21} \sin 2(AH_1 - \mu_{21}) \frac{dAH_1}{dt} - 2A_{22} \sin 2(AH_2 - \mu_{22}) \frac{dAH_2}{dt} = 0$$

En introduisant  $\omega = AH_2 - AH_1$  et  $\alpha_2 = T_2 \frac{d\omega}{dt}$ , il vient :

$$A_{21} \frac{dAH_1}{dt} \sin 2(AH_1 - \mu_{21}) + A_{22} \left( \frac{dAH_1}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \right) \sin 2(AH_1 - \alpha_2 - \mu_{21} + \omega) = 0$$

$$\text{or } \sin 2(AH_1 - \alpha_2 - \mu_{21} + \omega) = \sin 2(AH_1 - \mu_{21}) \cos 2(\alpha_2 - \omega) - \sin 2(\alpha_2 - \omega) \cos 2(AH_1 - \mu_{21})$$

$$\text{d'où } \sin 2(AH_1 - \mu_{21}) \left[ A_{21} \frac{dAH_1}{dt} + A_{22} \left( \frac{dAH_1}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \right) \cos 2(\alpha_2 - \omega) \right] - A_{22} \left( \frac{dAH_1}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \right) \cos 2(AH_1 - \mu_{21}) \sin 2(\alpha_2 - \omega) = 0$$

$$\text{tg } 2(AH_1 - \mu_{21}) = \frac{\sin 2(\alpha_2 - \omega)}{A_{21} \frac{dAH_1}{dt} + A_{22} \cos 2(\alpha_2 - \omega)}$$

$$\text{or } \frac{dAH_1}{dt} / \frac{dAH_2}{dt} \approx \frac{29}{30}$$

$$\text{donc } \text{tg } 2(AH_1 - \mu_{21}) = \frac{\sin 2(\alpha_2 - \omega)}{\frac{29}{30} A_{21} + \cos 2(\alpha_2 - \omega)} = \text{tg } 2P_{21}$$

$$AH_1 = \mu_{21} + P_{21}$$

$$\text{tg } 2P_{21} = \frac{\sin 2(\alpha_2 - \omega)}{\frac{29}{30} \frac{A_{21}}{A_{22}} + \cos 2(\alpha_2 - \omega)}$$

Ces deux relations déterminent l'instant de la pleine mer ou de la basse mer,  $p_{21}$  étant défini à  $\frac{\pi}{2}$  près.

L'angle  $p_{21}$  dépend de  $\omega$  donc de  $AH_1$  : il est nécessaire de procéder par approximations successives. En première approximation, on considère que la pleine mer a lieu  $T_2$  heures après le passage de la Lune au méridien. A cet instant

$$AH_1 = T_2 \frac{d AH_1}{dt}$$

$$AH_2 = AH_{20} + T_2 \frac{d AH_2}{dt} \quad \text{où } AH_{20} \text{ est l'angle horaire du Soleil au}$$

moment du passage de la Lune au méridien

$$\text{soit } (\alpha_2 - \omega) = -AH_{20}$$

On en déduit une valeur approchée  $p_{21}$  et  $AH_1 = \mu_{21} + p_{21}$ .

Cette approximation est en général suffisante.

La pleine mer suit le passage de la Lune au méridien d'un intervalle de temps

$$(\mu_{21} + p_{21}) \frac{dt}{dAH_1} = \frac{30}{29} (\mu_{21} + p_{21}) \quad (\mu_{21} \text{ et } p_{21} \text{ en heures) appelé } \underline{\text{établissement}}.$$

L'angle  $p_{21}$  manifeste l'influence de la composante solaire. En son absence la pleine mer correspondrait à des angles horaires constants de la Lune.

$$AH_2 = \mu_{21} + n\pi$$

et suivrait le passage de la Lune au méridien d'un intervalle constant égal à  $\frac{30}{29} \mu_{21}$  ( $\mu_{21}$  en heures) appelé établissement moyen.

Pour étudier les variations de  $p_{21}$ , remarquons que  $2p_{21}$  est l'angle en  $O_1$

d'un triangle  $O_1 L_1 S_1$  ayant pour côtés  $29A_{21}$

et  $30A_{12}$  et deux angles égaux à  $2p_{21}$  et

$$\pi - 2(\alpha_2 - \omega) \quad (\text{Fig. 3}).$$

Le maximum de  $|p_{21}|$  est atteint, si on suppose

$\frac{A_{21}}{A_{12}}$  constant, lorsque le triangle est rectangle en  $S_1$  :

$$\text{Alors } \sin 2p_{21 \max} = \frac{30A_{12}}{29A_{21}}$$

$$\text{et } \cos 2(\alpha_2 - \omega) = \frac{30A_{12}}{29A_{21}}$$

$$\text{mais, } \frac{A_{12}}{A_{21}} = \frac{B_{22}}{B_{21}} \frac{i_2^3 \cos^2 \delta_2}{i_1^3 \cos^2 \delta_1} \quad \text{où } B_{22} \text{ et}$$

$B_{21}$  sont des constantes pour le lieu considéré et  $\frac{i_2^3 \cos^2 \delta_2}{i_1^3 \cos^2 \delta_1}$  varie entre 0,67 et 1,54

$$\text{Soit } 0,67 \frac{B_{22}}{B_{21}} \leq |\sin 2p_{21 \max}| \leq 1,54 \frac{B_{22}}{B_{21}}$$

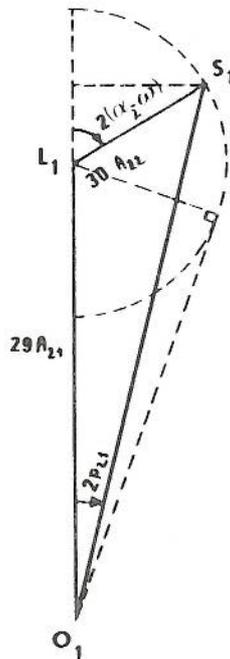


Fig. 3

Sur les côtes françaises,  $\frac{B_{22}}{B_{21}} = \frac{1}{3}$  et :

$$27 \text{ mn} \leq |p_{21 \max}| \leq 1 \text{ h } 02 \text{ mn}$$

Le maximum de  $|p_{21}|$  varie donc dans des limites assez larges ; l'emploi de la notion d'établissement conduit à des résultats assez imprécis.

### 3.4.3 - Hauteurs des pleines et basses mers

Pour obtenir la hauteur de la pleine mer ou de la basse mer, il suffit de remplacer  $(AH_1 - \mu_{21})$  par  $p_{21}$  dans l'expression de la hauteur d'eau obtenue au § 3.4.1 :

$$h = R_2 \cos 2(p_{21} - p_2)$$

$$\text{or } \operatorname{tg} 2p_2 = \frac{\sin 2(\alpha_2 - \omega)}{\left(\frac{A_{21}}{A_{22}} + \cos 2(\alpha_2 - \omega)\right)}$$

$$\text{et } \operatorname{tg} 2p_{21} = \frac{\sin 2(\alpha_2 - \omega)}{\left(\frac{29A_{21}}{30A_{22}} + \cos 2(\alpha_2 - \omega)\right)}$$

comme  $\frac{29}{30}$  est peu différent de 1, ces deux expressions sont très voisines et :

$$h \approx \pm R_2 = \pm \sqrt{A_{21}^2 + A_{22}^2 + 2A_{21}A_{22} \cos 2(\omega - \alpha_2)}$$

La hauteur de la basse mer correspond au signe  $-$ , celle de la pleine mer au signe  $+$ .

### 3.4.4 - Variation des hauteurs de pleines et basses mers

Les éléments  $A_{21}$  et  $A_{22}$  varient suffisamment peu avec le temps pour que les extremums de  $R_2$  soient définis par les variations de  $(\omega - \alpha_2)$ .

Le maximum  $A_{21} + A_{22}$  correspond à  $\omega = \alpha_2$  ou  $\omega = \alpha_2 + \pi$ . Il y a lieu au bout d'un temps  $\left(\frac{1}{2} \times \frac{dt}{d\omega} = T_2\right)$  après les syzygies ( $\omega = 0$  ou  $\pi$ ). L'une des deux pleines mers (basses mers) encadrant cet instant est la plus grande de la demi-lunaison ; c'est la pleine mer (basse mer) de vive-eau. Sa hauteur est voisine de  $\pm (A_{21} + A_{22})$ .

Le minimum  $A_{21} - A_{22}$  correspond à  $\omega = \alpha_2 + \frac{\pi}{2}$  ou  $\omega = \alpha_2 + \frac{3\pi}{2}$  et a lieu au bout du temps  $T_2$  après les quadratures ( $\omega = \frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2}$ ). L'une des deux pleines mers (basses mers) encadrant cet instant est la plus petite de la demi-lunaison ; c'est la pleine mer (basse mer) de morte-eau. Sa hauteur est voisine de  $\pm (A_{21} - A_{22})$ .

En vive-eau et en morte-eau,  $\sin 2(\omega - \alpha_2)$  est petit ( $2(\omega - \alpha_2)$  voisin de 0 ou  $\pi$ ) et par suite l'angle  $p_{21}$  correspondant est voisin de 0 ou  $\frac{1}{2}\pi$ .

Les pleines mers (basses mers) de vive-eau ou de morte-eau ont donc lieu au bout d'un temps  $\frac{30}{29} \mu_{24} \left( \frac{30}{29} \left( \mu_{24} + \frac{\pi}{2} \right) \right)$  (égal à l'établissement moyen) après le passage de la Lune au méridien. Or l'heure de passage de la Lune au méridien ( $AH_1 = 0$ ) un jour de syzygie est voisine de midi vrai ( $AH_2 = 0$ ) à  $\pm 25$  minutes près. Il en résulte que les pleines et basses mers de vive-eau se produisent toujours sensiblement à la même heure, particularité connue depuis fort longtemps. Il en est de même pour les marées de morte-eau.

Au cours d'une lunaison, les marnages de la marée semi-diurne passent donc par deux maximums et deux minimums. Cette variation constitue l'inégalité semi-mensuelle. D'une lunaison à l'autre, ces extremums varient avec les déclinaisons et les distances des astres (inégalités déclinaisonnelle et parallactique). L'orbite lunaire étant inclinée de  $5^\circ$  sur l'écliptique, l'écart des déclinaisons des deux astres ne dépasse pas  $5^\circ$  en valeur absolue lorsqu'ils passent ensemble au méridien, c'est-à-dire au moment des syzygies. Donc aux syzygies d'équinoxe ( $\delta_2 \approx 0$ ),  $\cos^2 \delta_1$  et  $\cos^2 \delta_2$  sont voisins de 1 ;  $A_{21}$  et  $A_{22}$  sont maximums en ce qui concerne les déclinaisons. Les variations dues aux distances étant plus faibles que celles dues aux déclinaisons, les vives-eaux voisines de l'équinoxe sont à peu près les plus grandes possibles. On trouverait de même que les vives-eaux de solstice sont les plus faibles. L'inégalité parallactique a un effet comparable mais moins accentué : les vives-eaux de périgée sont plus grandes - toutes choses égales par ailleurs - que les vives-eaux d'apogée.

Pour comparer les marnages dans divers ports, Laplace a caractérisé chaque port par une unité de hauteur qui est le demi-marnage de la marée de vive-eau qui a lieu  $T_2$  heures après une syzygie ( $AH_1 = AH_2$ ) d'équinoxe ( $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ) moyenne ( $i_1 \approx \frac{120}{119}$  ;  $i_2 = 1$ )

$$U \approx \frac{41}{40} B_{21} + B_{22}$$

En divisant par  $U$  le demi-marnage d'une marée quelconque, on obtient une expression qui dépend de  $\alpha_2$  et du rapport  $\beta = \frac{B_{21}}{B_{22}}$ . Or  $\alpha_2$  et  $\beta$  varient beaucoup plus lentement avec le lieu que les valeurs individuelles  $B_{21}$  et  $B_{22}$ . L'expression

$$C = \frac{\sqrt{A_{21}^2 + A_{22}^2 + 2 A_{21} A_{22} \cos(\omega - \alpha_2)}}{U}$$

permet donc de caractériser le marnage dans une région donnée,  $\alpha_2$  et  $\beta$  étant adopté.  $C$  devient une quantité astronomique appelée coefficient de marée qui caractérise les variations dans le temps du marnage, l'unité de hauteur traduisant les variations dans l'espace.

Depuis 1868, le Service Hydrographique publie dans l'Annuaire des marées des ports de France les valeurs du coefficient calculé pour chaque pleine mer à partir de la formule :

$$C = \frac{\text{hauteur de la pleine mer semi-diurne à Brest}}{3,209 \text{ m}} \times 100$$

où  $U = 3,209 \text{ m}$  est la valeur de l'unité de hauteur déduite des observations.

Les valeurs caractéristiques sont les suivantes :

M a r é e	Coefficient
Vive-eau maximum (équinoxe, Lune périgée et dans l'équateur)	120
Vive-eau moyenne d'équinoxe	100
Vive-eau moyenne	95 (94 jusqu'en 1948)
Vive-eau minimum (solstice, Lune apogée à sa déclinaison maximale)	69
Morte-eau maximum	63
Morte-eau moyenne	45
Morte-eau minimale	20

La valeur 95 adoptée pour la vive-eau moyenne depuis 1948 facilite les interpolations entre vive-eau et morte-eau moyennes.

La valeur moyenne du coefficient sur une longue période est sensiblement de **70** ; la moyenne annuelle varie de 68 à 73 avec une périodicité voisine de 18 ans 2 3.

Les constantes  $\alpha_2$  et  $\beta_2$  varient lentement lorsqu'on se déplace le long du littoral français en partant de Brest. Le coefficient de ce port reste donc valable sur les côtes françaises de la Manche et de l'Atlantique.

On peut remarquer que, par définition, le coefficient de vive-eau moyenne d'équinoxe est égal à 100 quels que soient  $\alpha_2$  et  $\beta_2$ , donc quelle que soit la région considérée.

Plus généralement les vives-eaux d'un lieu quelconque (mais à marée semi-diurne prépondérante) restent assez bien déterminées en employant le coefficient de Brest au lieu du coefficient local. L'écart ne devient très important que pour les mortes-eaux.

Le coefficient ne présente d'intérêt pratique que lorsque la marée semi-diurne est largement prépondérante. Du fait de l'existence des ondes d'autres espèces, il n'y a pas de relation rigoureusement biunivoque entre le coefficient et le marnage de la marée totale. Un marnage donné peut correspondre à des coefficients différents et inversement.

### 3.4.5. Intervalle de temps entre deux pleines mers consécutives

Si la composante lunaire existait seule, l'intervalle entre deux pleines mers consécutives serait de 12 h 25 mn mais, en raison de l'action solaire, il faut ajouter la variation  $\Delta p_{21}$  des angles  $p_{21}$  relatifs à ces deux pleines mers.

En première approximation les variations de  $AH_1$  et  $AH_2$  entre deux pleines mers consécutives sont :

$$\Delta AH_1 = 0$$

$$\Delta AH_2 = 25 \text{ mn}$$

$$\text{soit } \Delta \omega = 25 \text{ mn}$$

$$\text{or } \operatorname{tg} 2p_{21} = \frac{\sin 2(\alpha_2 - \omega)}{\frac{A_{21}}{A_{22}} + \cos 2(\alpha_2 - \omega)}$$

$$2\Delta p_{21}(1 + \operatorname{tg}^2 2p_{21}) = \frac{-2\Delta\omega \cos 2(\alpha_2 - \omega) \left( \frac{A_{21}}{A_{22}} + \cos 2(\alpha_2 - \omega) \right) - 2\Delta\omega \sin^2 2(\alpha_2 - \omega)}{\left( \frac{A_{21}}{A_{22}} + \cos 2(\alpha_2 - \omega) \right)^2}$$

$$\Delta p_{21}(1 + \operatorname{tg}^2 2p_{21}) = -\Delta\omega \frac{A_{22}^2 + A_{21}A_{22} \cos 2(\alpha_2 - \omega)}{(A_{21} + A_{22} \cos 2(\alpha_2 - \omega))^2}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 2p_{21} = \frac{(A_{21} + A_{22} \cos 2(\alpha_2 - \omega))^2 + A_{22}^2 \sin^2 2(\alpha_2 - \omega)}{(A_{21} + A_{22} \cos 2(\alpha_2 - \omega))^2}$$

$$\text{donc } \Delta p_{21} = -\Delta\omega \frac{A_{22}^2 + A_{21}A_{22} \cos 2(\alpha_2 - \omega)}{A_{21}^2 + A_{22}^2 + 2A_{21}A_{22} \cos 2(\alpha_2 - \omega)}$$

$$|\Delta p_{21}| \text{ est maximum pour } \cos 2(\alpha_2 - \omega) = 1 \quad (\text{vive-eau})$$

$$\text{minimum pour } \cos 2(\alpha_2 - \omega) = -1 \quad (\text{morte-eau})$$

$$\text{soit } \Delta p_{21} = -\Delta\omega \frac{A_{22}^2 + A_{21}A_{22}}{A_{21}^2 + A_{22}^2 + 2A_{21}A_{22}} = -\Delta\omega \frac{A_{22}}{A_{21} + A_{22}}$$

$$\Delta p_{21} = -\Delta\omega \frac{A_{22}^2 - A_{21}A_{22}}{A_{21}^2 + A_{22}^2 - 2A_{21}A_{22}} = +\Delta\omega \frac{A_{22}}{A_{21} - A_{22}}$$

L'intervalle de temps  $\Delta t$  entre les deux pleines mers est donc :

$$\Delta t = 25 \text{ mn} + \Delta p_{21} + 12 \text{ h}$$

$$\text{soit } \Delta t = 12 \text{ h} + 25 \text{ mn} \left( 1 - \frac{A_{22}}{A_{21} + A_{22}} \right) = 12 \text{ h} + 25 \text{ mn} \frac{A_{21}}{A_{21} + A_{22}} \quad (\text{vive-eau})$$

$$\Delta t = 12 \text{ h} + 25 \text{ mn} \left( 1 + \frac{A_{22}}{A_{21} - A_{22}} \right) = 12 \text{ h} + 25 \text{ mn} \frac{A_{21}}{A_{21} - A_{22}} \quad (\text{morte-eau})$$

L'intervalle de temps est minimal en vive-eau, maximal en morte-eau. Le long des côtes de France où  $\frac{A_{21}}{A_{22}}$  est voisin de 3, on trouve 12 h 19 mn en vive-eau contre 12 h 38 mn en morte-eau.

### 3.5 - Etude de la marée diurne à l'aide de la formule de Laplace

#### 3.5.1 - Détermination des pleines et basses mers

Comme dans le cas de la marée semi-diurne seule, les deux termes qui composent la marée diurne peuvent être combinés et la hauteur due à la marée diurne seule s'écrit :

$$h = R_1 \cos (A_{11} - \mu_{11} - p_1)$$

$$\text{où : } R_1 = \sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2 + 2A_{11}A_{12} \cos(\omega - \alpha_1)}$$

$$\alpha_1 = \mu_{12} - \mu_{11} = T_1 \frac{d\omega}{dt}$$

$$p_1 = - \text{Arc cotg} \left( \frac{A_{11} + A_{12} \cos(\omega - \alpha_1)}{A_{12} \sin(\omega - \alpha_1)} \right)$$

Si on néglige, en première approximation, les variations de  $\omega = A_{12} - A_{11}$  au cours de la journée, on voit que  $h$  passe, au cours du jour lunaire, par un maximum égal à  $R_1$  pour  $A_{11} = \mu_{11} + p_1$  et par un minimum égal à  $-R_1$  pour  $A_{11} = \mu_{11} + p_1 + \pi$ . La prise en compte des variations de  $\omega$  conduit à des formules analogues à celles de la marée semi-diurne.

L'instant des pleines et basses mers est donné par les relations :

$$A_{11} = \mu_{11} + p_1 \frac{A_{12} \sin(\alpha_1 - \omega)}{A_{12} \sin(\alpha_1 - \omega)}$$

$$\text{soit } p_1 = \frac{29}{30} A_{11} + A_{12} \cos(\alpha_1 - \omega)$$

et leur hauteur est :

$$h \simeq \pm R_1 = \pm \sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2 + 2A_{11}A_{12} \cos(\omega - \alpha_1)}$$

Dans la réalité cependant, le phénomène est encore plus perturbé par les variations des éléments astronomiques que dans le cas de la marée semi-diurne, ce qui limite la validité de ces formules. En effet les amplitudes  $A_{11}$  et  $A_{12}$  qui dépendent du sinus du double de la déclinaison varient dans des limites plus larges que  $A_{21}$  et  $A_{22}$ . Cette variation est en outre très rapide lorsque la déclinaison passe par zéro.

#### 3.5.2 - Vive-eau et morte-eau

En général, le temps lunaire  $B_{11}$  est prépondérant et les variations de  $R_1$  sont liées aux variations de la déclinaison de la Lune.

Le maximum correspond au passage de la Lune par ses tropiques. L'une des deux pleines mers (ou basses mers) encadrant cet instant est la plus grande de la demi-lunaison : c'est la pleine mer (basse mer) de vive-eau. Sa hauteur est maximum lors des solstices ( $A_{12}$  maximum).

Le minimum correspond au passage de la Lune dans le plan de l'équateur. L'une des deux pleines mers (ou basses mers) encadrant cet instant est la plus petite de la demi-lunaison : c'est la pleine mer (basse mer) de morte-eau. Sa hauteur devient pratiquement nulle lors des équinoxes ( $A_{12} = 0$ ).

### 3.6 - Combinaison des marées diurne et semi-diurne

La hauteur d'eau est représentée pour une journée par la formule :

$$h = R_2 \cos 2(AH_1 - \mu_{21} - p_2) + R_1 \cos(AH_1 - \mu_{11} - p_1)$$

En négligeant les variations de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $p_1$  et  $p_2$  au cours de la journée, les instants des pleines et basses mers sont donnés par :

$$\frac{dh}{dt} \approx 0$$

$$\text{Soit } 2R_2 \sin 2(AH_1 - \mu_{21} - p_2) + R_1 \sin(AH_1 - \mu_{11} - p_1) = 0$$

Lorsque  $R_1$  est petit devant  $R_2$ , les heures des extremums de la marée totale diffèrent peu de celles relatives à la marée semi-diurne. On peut donc faire un développement limité de cette expression en fonction de  $u$  :

$$u = AH_1 - \mu_{21} - p_2 - k \frac{\pi}{2} \quad (k \text{ entier})$$

qui est une quantité petite au voisinage des extremums.

On obtient :

$$4uR_2 + uR_1 \cos(\delta + k \frac{\pi}{2}) + R_1 \sin(\delta + k \frac{\pi}{2}) = 0$$

avec  $\delta = \mu_{21} + p_2 - \mu_{11} - p_1$

d'où 
$$u = \frac{-\sin(\delta + k \frac{\pi}{2})}{\cos(\delta + k \frac{\pi}{2}) + 4 \frac{R_2}{R_1}}$$

La quantité  $u$  reste petite, et les approximations faites sont justifiées lorsque :

$$4 R_2 \gg R_1$$

Les heures et hauteurs des pleines et basses mers d'une journée sont données dans le tableau ci-dessous :

	Instant	Hauteur
Pleine mer $k = 0$	$AH_1 - \mu_{21} + p_2 - \frac{\sin \delta}{\cos \delta + 4R_2/R_1}$	$R_2 + R_1 \cos \delta$
Basse mer $k = 1$	$AH_1 - \mu_{21} + p_2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\cos \delta}{\sin \delta - 4R_2/R_1}$	$-R_2 - R_1 \sin \delta$
Pleine mer $k = 2$	$AH_1 - \mu_{21} + p_2 + \pi + \frac{\sin \delta}{4R_2/R_1 - \cos \delta}$	$R_2 - R_1 \cos \delta$
Basse mer $k = 3$	$AH_1 - \mu_{21} + p_2 + \frac{3\pi}{2} + \frac{\cos \delta}{4R_2/R_1 + \sin \delta}$	$-R_2 + R_1 \sin \delta$

La superposition des deux marées se traduit par une inégalité sur les hauteurs de deux pleines mers et de deux basses mers consécutives qui diffèrent respectivement de  $2 R_1 \cos \gamma$  et  $2 R_1 \sin \gamma$  .

Un fait analogue se produit pour les heures, le décalage  $u$  étant de signe contraire pour deux pleines mers et deux basses mers consécutives.

Cette inégalité diurne sur les heures et les hauteurs est d'autant plus importante que la marée diurne est plus grande.

#### 4 - Validité de la formule de Laplace

La formule de Laplace s'est révélée très satisfaisante pour la prédiction des pleines et basses mers dans les lieux où la marée diurne est faible sinon négligeable par rapport à la marée semi-diurne, ce qui est le cas à Brest et sur la plupart des côtes européennes. Lorsque la marée diurne devient importante, le calcul direct des pleines et basses mers n'est plus possible avec une précision suffisante.

De même, en eau peu profonde, il n'est plus possible de négliger les ondes supérieures et composées issues des effets non linéaires.

Dans les deux cas, la formule de Laplace perd de son intérêt et il est préférable de recourir à la formule harmonique.

FORMULE HARMONIQUE DE LA MAREE

1 - Généralités

La formule harmonique des marées découle directement des deux principes de base de la théorie dynamique énoncés par Laplace : principe des oscillations forcées et principe de la superposition des petits mouvements (chapitre V). Elle repose sur un développement du potentiel générateur en une somme de termes rigoureusement périodiques.

C'est en 1867 que Lord KELVIN a montré qu'on pouvait décomposer le potentiel luni-solaire en une somme de termes fonctions du temps moyen et de la forme  $C_i \cos(\sigma_i t - \alpha_i)$ . A chacun de ces termes, il faisait correspondre une marée élémentaire de même période dont l'amplitude et le déphasage sont déduits de l'analyse de séries d'observations appropriées et dont la superposition constitue la marée réelle.

En 1883, DARWIN a donné un développement quasi-harmonique, c'est-à-dire dans lequel il conservait des coefficients et des déphasages considérés comme constants sur une période assez longue, un an par exemple, mais qui en réalité sont lentement variables. Ce développement a été repris et complété par SCHUREMAN qui a publié en 1924 la première édition de son "Manual of harmonic analysis and prediction of tides".

C'est en 1921 que DOODSON du Tidal Institute de l'Université de Liverpool a publié un développement purement harmonique, basé sur la théorie lunaire moderne et utilisant, en particulier, les développements théoriques de la longitude et de la latitude de la Lune établis par BROWN en 1905.

Ce développement est mieux adapté au calcul automatique que celui de DARWIN. Il ne diffère pas sensiblement du développement calculé par CARTWRIGHT, TAYLER et EDDEN en 1971 et 1973 à partir des nouvelles constantes astronomiques.

2 - Développement harmonique du potentiel luni-solaire

2.1 - Potentiel générateur de la marée lunaire

Posons :

- a : rayon de la Terre en M
- r : distance entre les centres de la Terre et de la Lune
- $r_0$  : distance moyenne Terre-Lune
- $m_L$  : masse de la Lune
- $m_T$  : masse de la Terre
- G : longitude du point M (comptée positivement vers l'Ouest)
- L : latitude de M (comptée positivement vers le Nord)
- $\theta$  : distance zénithale géocentrique de la Lune vue de M
- k : la constante de l'attraction universelle

$$g : g = \frac{km_T}{a^2}$$

Le potentiel générateur de la marée dû à la Lune se développe en série entière en  $\frac{a}{r}$  (voir paragraphe 4.2 - chapitre III) .

$$V = \frac{m_L}{m_T} \frac{g a^4}{r^3} \sum_{l=2}^4 \left(\frac{a}{r}\right)^{l-2} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=2}^4 V_l$$

où les  $P_l$  sont les polynômes de Legendre :

$$P_2 = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_3 = \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

$$P_4 = \frac{1}{8} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$$

$$\text{Posons } C = \frac{3}{4} \frac{m_L}{m_T} \frac{g a^4}{r_o^3}$$

et par conséquent :

$$V_2 = \frac{2}{3} (3 \cos^2 \theta - 1) C \left(\frac{r_o}{r}\right)^3$$

$$V_3 = \frac{2}{3} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) C \left(\frac{r_o}{r}\right)^4 \frac{a}{r_o}$$

$$V_4 = \frac{1}{6} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) C \left(\frac{r_o}{r}\right)^5 \left(\frac{a}{r_o}\right)^2$$

avec

$$\frac{a}{r_o} = 0,016\,593\,7$$

La première étape pour continuer le développement de  $V_l$  consiste à séparer les termes à longues périodes diurnes, semi-diurnes, tiers-diurnes et quart-diurnes suivant la méthode décrite au chapitre III (paragraphe 4.3) .

Introduisons sur la sphère céleste de rayon unité et centrée au centre de la Terre, les points suivants :

(voir figure 1)

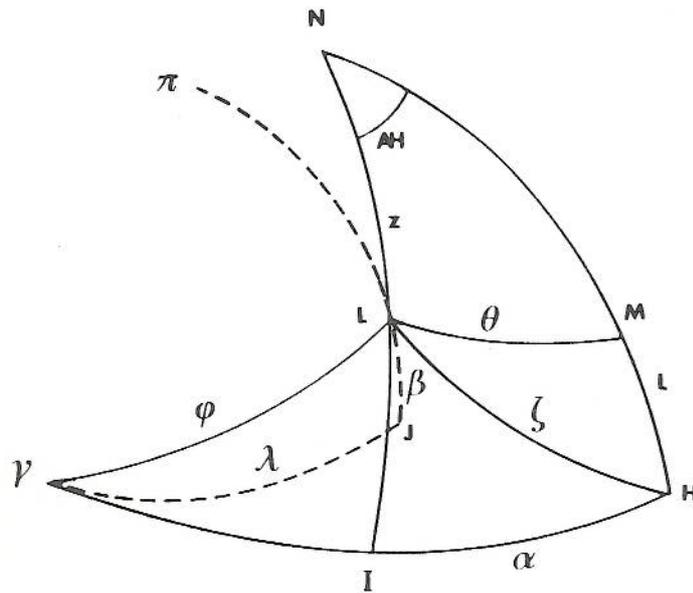


Figure 1

- $V$  dans la direction du point vernal  
 $N$  dans la direction du Nord  
 $L$  dans la direction du centre de la Lune  
 $H$  l'intersection du méridien de  $M$  avec l'équateur  
 $\pi$  dans la direction du pôle de l'écliptique  
 $J$  l'intersection du grand cercle  $\pi L$  avec l'écliptique  
 $I$  l'intersection du méridien de  $L$  avec l'équateur .

et posons

- $\alpha = \widehat{VH}$   
 $\lambda = \widehat{VJ}$  longitude écliptique de la Lune  
 $\beta = \widehat{LJ}$  latitude écliptique de la Lune  
 $\theta = \widehat{LM}$   
 $z = \widehat{LN}$   
 $\zeta = \widehat{LH}$   
 $\varphi = \widehat{VL}$   
 $\epsilon = \widehat{HVLJ}$  obliquité de l'écliptique  
 $\epsilon' = \widehat{JVL}$

$AH$  l'angle horaire de  $L$

Appliquons la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique au triangle sphérique L N M :

$$\cos \Theta = \sin L \cos z + \cos L \sin z \cos AH$$

Comme AH augmente d'environ 360° par jour lunaire moyen, le développement de  $V_l$  ( $l = 2, 3, 4$ ) en fonction de  $\cos AH$ ,  $\cos 2AH$ ,  $\cos 3AH$ ,  $\cos 4AH$  sépare les espèces. Ces développements s'expriment par une série de termes comprenant des fonctions  $H_n^l$  de  $z$  et de  $nAH$  multipliées par des fonctions  $G_n^l$  de  $L$  et de  $C$  appelées coefficients géodésiques :

$$V_l = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{l+1} \sum_{n=0}^l \alpha_n^l G_n^l H_n^l \quad (l = 2, 3, 4)$$

Les constantes  $\alpha_n^l$  sont introduites pour que les coefficients géodésiques aient tous même valeur maximum égale à  $C$ .

Une seconde expression des  $H_n^l$  en fonction de  $z$  et de  $\zeta$  est obtenue en considérant le triangle sphérique L N H

$$\cos \zeta = \cos \widehat{NH} \cos z + \sin \widehat{NH} \sin z \cos AH, \text{ comme}$$

$$\widehat{NH} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \zeta = \sin z \cos AH$$

TABLEAU I

Développement du potentiel générateur de la marée lunaire

	n	l	$\alpha_n^l$	$G_n^l$	$H_n^l$
longues périodes	0	2	1	$\frac{1}{2} C (1 - 3 \sin^2 L)$	$\frac{2}{3} - 2 \cos^2 z$
		3	0,004947	$1,11803 C \sin L (3 - 5 \sin^2 L)$	$\cos z (3 - 5 \cos^2 z)$
		4	0,000046	$0,12500 C (3 - 30 \sin^2 L + 35 \sin^4 L)$	$3 - 30 \cos^2 z + 35 \cos^4 z$
diurnes	1	2	1	$C \sin 2L$	$\sin 2z \cos AH = 2 \cos z \cos \zeta$
		3	0,011425	$0,72618 C \cos L (1 - 5 \sin^2 L)$	$\sin z \cos AH (1 - 5 \cos^2 z) = \cos \zeta (1 - 5 \cos^2 z)$
		4	0,000121	$0,47346 C \sin 2L (3 - 7 \sin^2 L)$	$\sin 2z \cos AH (3 - 7 \cos^2 z)$
semit diurnes	2	2	1	$C \cos^2 L$	$\sin^2 z \cos 2AH = 2 \cos^2 \zeta - \sin^2 z$
		3	0,031935	$2,59808 C \sin L \cos^2 L$	$\sin^2 z \cos z \cos 2AH = \cos z (2 \cos^2 \zeta - \sin^2 z)$
		4	0,000148	$0,77778 C \cos^2 L (1 - 7 \sin^2 L)$	$\sin^2 z \cos 2AH (1 - 7 \cos^2 z)$
tours diurnes	3	3	0,013828	$C \cos^3 L$	$\sin^3 z \cos 3AH = \cos \zeta (4 \cos^2 \zeta - 3 \sin^2 z)$
		4	0,000522	$3,07920 C \sin L \cos^3 L$	$\sin^3 z \cos z \cos 3AH$
it diurnes	4	4	0,000201	$C \cos^4 L$	$\sin^4 z \cos 4AH$

Le développement obtenu en fonction de  $\cos z$  et  $\cos \zeta$  (tableau I) se transforme en un développement en fonction des coordonnées écliptiques  $\lambda$  et  $\beta$  de la Lune.

En effet, la relation des sinus donne :

appliquée au triangle  $VLI$

$$\frac{\sin \widehat{LI}}{\sin (\epsilon + \epsilon')} = \frac{\sin \varphi}{\sin \widehat{VIL}}$$

d'où (1)  $\cos z = \sin \varphi \sin (\epsilon + \epsilon') = \sin \varphi \sin \epsilon \cos \epsilon' + \sin \varphi \cos \epsilon \sin \epsilon'$

La formule fondamentale appliquée au triangle  $VLH$  donne :

$$\begin{aligned} (2) \cos \zeta &= \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha \cos (\epsilon + \epsilon') \\ &= \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha \cos \epsilon \cos \epsilon' - \sin \varphi \sin \alpha \sin \epsilon \sin \epsilon' \end{aligned}$$

En considérant le triangle  $VLJ$ , on peut écrire :

$$(3) \cos \varphi = \cos \beta \cos \lambda \quad (\text{formule fondamentale})$$

$$(4) \sin \varphi \sin \epsilon' = \sin \beta \quad (\text{relation des sinus})$$

$$\cos \beta = \cos \varphi \cos \lambda + \sin \varphi \sin \lambda \cos \epsilon' \quad (\text{formule fondamentale})$$

$$\cos \beta = \cos^2 \lambda \cos \beta + \sin \varphi \sin \lambda \cos \epsilon' \quad (\text{d'après (3)})$$

d'où

$$(5) \sin \varphi \cos \epsilon' = \sin \lambda \cos \beta$$

En reportant (3) et (5) dans (1) et (2), il vient

$$\cos z = \sin \epsilon \cos \beta \sin \lambda + \cos \epsilon \sin \beta$$

$$\cos \zeta = \cos \beta \cos \lambda \cos \alpha + (\cos \epsilon \cos \beta \sin \lambda - \sin \epsilon \sin \beta) \sin \alpha$$

avec  $\epsilon = 23^\circ 27' 8,26''$  (valeur au 1er janvier 1900)

Les développements harmoniques de  $\lambda$ ,  $\beta$  et  $(\frac{r_0}{r})^n$  s'obtiennent d'après les tables de BROWN. On en déduit les développements de  $\cos z$  et  $\cos \zeta$  puis ceux de  $V_2$ ,  $V_3$  et  $V_4$ .

## 2.2 - Potentiel générateur de la marée solaire

La méthode est analogue à celle utilisée pour le potentiel lunaire mais les calculs sont plus simples : les développements de la longitude et de la parallaxe du Soleil contiennent très peu de termes et on peut négliger la latitude du Soleil.

Pour le calcul des coefficients géodésiques, la constante  $C_1$  relative au potentiel solaire :

$$C_1 = \frac{3}{4} \frac{m_s}{m_T} \frac{ga^4}{r_{01}^3}$$

est remplacée par son expression en fonction de  $C$  :

$$C_1 = \frac{m_s}{m_L} \frac{r_0^3}{r_{01}^3} C$$

La valeur numérique adoptée par DOODSON est :

$$C_1 = 0,46040 C \quad (\text{contre } 0,45923 C \text{ à partir des nouvelles constantes astronomiques})$$

## 2.3 - Développement de DOODSON

### 2.3.1 - Choix des variables fondamentales

Les variables retenues par DOODSON pour exprimer les arguments des termes du développement sont, classées dans l'ordre des périodes croissantes :

- le temps moyen lunaire local  $\tau$  (réduit en angle et compté à partir du passage inférieur de la "lune moyenne" au méridien), et les longitudes écliptiques suivantes :
- la longitude moyenne de la Lune  $s$ ,
- la longitude moyenne du Soleil  $h$ ,
- la longitude du périhélie de la Lune  $p$ ,
- la longitude du noeud ascendant de la Lune :  $N = -N'$ ,
- la longitude du périhélie du Soleil  $p_1$ ,

Ces variables sont fonctions du temps. Les données numériques correspondantes sont rassemblées dans le tableau 2 où  $t$  représente l'heure civile du lieu considéré, et  $T$  la période écoulée depuis le 1er janvier 1900 à 0 h 00 UT, comptée en siècles juliens de 36525 jours.

TABLERAU 2

#### Données numériques pour les éléments astronomiques

(d'après "Connaissance des Temps" - Ephémérides astronomiques pour l'an 1978")

Symbole	Expression en fonction du temps (degrés)	Vitesse angulaire (degrés/jour)	Période
$\tau$	$15 t + h - s$	347,809 250 80	1,035 050 jours
$s$	$277,02236 + 481 267,88314 T - 0,00113 T^2$	13,176 396 53	27,321 582 jours
$h$	$280,18950 + 36 000,76893 T + 0,00030 T^2$	0,985 647 34	365,242 199 jours
$p$	$334,385258 + 4 069,03403 T - 0,01032 T^2$	0,111 404 08	8,847 309 ans
$N'$	$100,84320 + 1934,14201 T - 0,00208 T^2$	0,052 953 92	18,612 904 ans
$p_1$	$281,22086 + 1,71918 T + 0,00045 T^2$	0,000 047 07	209,402 157 siècles

### 2.3.2 - Expression du potentiel luni-solaire

DOODSON néglige tous les termes dont le coefficient numérique est inférieur à  $10^{-4}$ . Cette règle supprime tous les termes issus de  $V_3$  solaire et tous les termes issus de  $V_4$  sauf un seul, un terme quart-diurne qui a un coefficient égal à 0,00016. Il le néglige aussi et aboutit à l'expression :

$$V = \sum_{i=0}^3 \begin{Bmatrix} G_i(L) \\ G'_i(L) \end{Bmatrix} \sum_{j,k,l,m,n=-6}^{+6} A_{ijklm} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (iT + js + kh + lp + mN' + np_1)$$

$G_i$  et  $G'_i$  sont les coefficients géodésiques, fonctions de la latitude du point :

$$\begin{aligned} G_0 &= G_0^2 & ; & & G'_0 &= G_0^3 \\ G_1 &= G_1^2 & ; & & G'_1 &= G_1^3 \\ G_2 &= G_2^2 & ; & & G'_2 &= G_2^3 \\ G_3 &= G_3^3 \end{aligned}$$

en reprenant les notations du paragraphe 2-1 (tableau 1).

$G_0$ ,  $G'_1$ ,  $G_2$  et  $G'_3$  sont associés à un cosinus ;  $G'_0$ ,  $G_1$  et  $G'_2$  à un sinus.

Chaque terme du développement est une composante (constituent pour les anglo-saxons) caractérisée par une combinaison de six nombres entiers ( $i, j, k, l, m, n$ ). DOODSON préconise l'emploi du nombre-argument pour identifier les composantes, en remarquant que  $i$  est toujours positif et que  $j, k, l, m$  et  $n$  sont en général compris entre  $-4$  et  $+4$ . Pour éviter d'avoir à écrire des nombres négatifs, il définit le nombre argument  $b$  par :

$$b = 100\,000\,i + 10\,000(j+5) + 1000(k+5) + 100(l+5) + 10(m+5) + (n+5)$$

Dans les cas très rares où  $j, k, l, m$  ou  $n$  tombe en dehors de l'intervalle  $[-4, +4]$ , on remplace  $-6$  par  $-1$ ,  $-5$  par  $0$ ,  $5$  par  $X$  et  $6$  par  $E$ .

Les composantes ayant même  $i$  constituent une espèce ; les composantes ayant même  $i$  et  $j$  forment un groupe ; celles ayant même  $i, j$  et  $k$  forment un sous-groupe.

Le développement complet est présenté au tableau 3 dans lequel les termes sont classés par espèces et par groupes, quelle que soit leur origine lunaire ou solaire.

TABLEAU 3

Développement harmonique du potentiel générateur de la marée

Espèce de longues périodes

Symbole	Nombre argument	Coefficients Num. Géod.	Symbole	Nombre argument	Coefficients Num. Géod.	Symbole	Nombre argument	Coefficients Num. Géod.
GROUPE O5			GROUPE O7			GROUPE O8 (suite)		
S <sub>sa</sub>	055 555	60458	M <sub>sf</sub>	071 755	26	M <sub>tm</sub>	085 255	54
	555	23411		072 558	91		455	2995
	565	-6553		073 545	98		465	1241
	575	64		555	1379		475	117
	665	26		565	-88		555	38
	056 554	-16		655	15		565	24
	554	1176		074 554	-17		675	-12
	558	-61		558	49		086 454	-26
	057 355	73		568	12			
	553	30		075 345	-36			
555	12	355	677	GROUPE O9				
655	7287	365	-44	M <sub>sqm</sub>	091 555	30		
565	-181	455	76		755	14		
575	-40	465	12		092 558	32		
059 554	427	065	15642		566	18		
059 553	17	565	6481		093 355	25		
		675	607		555	478		
		585	-13		665	200		
		076 554	-64		675	19		
		564	-14		095 355	396		
		077 355	-47		365	166		
		365	-19	375	16			
				455	11			
GROUPE O6			GROUPE O8			GROUPE OX		
M <sub>sm</sub>	062 656	68	M <sub>stm</sub>	081 655	42	0X1 655	23	
	063 445	-16		082 456	16		0X3 455	116
	645	-113		656	26		465	48
	655	1578		666	11		0X5 255	45
	665	-103		083 445	22		265	19
	054 456	51		455	217	GROUPE OE		
	555	-44		465	-14	0E1 555	12	
	654	-10		485	13	0E3 355	19	
	065 445	-542		555	569			
	455	8254		665	236			
465	-535	675	21					
545	-24	084 456	28					
555	466	455	10					
565	73	555	-16					
655	-442							
666	-179							
675	-47							
086 454	-43							
087 455	-116							
475	-59							

$G_o = 0,5 C (1 - 3 \sin^2 L)$  est le coefficient géodésique associé à un cosinus

$G'_o = 1,11803 C \sin L (3 - 5 \sin^2 L)$  est le coefficient géodésique associé à un sinus

$G_o$  est sous-entendu lorsque le coefficient géodésique n'est pas indiqué

(termes issus du potentiel  $V_2$  lunaire)





A chaque terme est associé son coefficient numérique ( $A_{ijklm}$ ) et son coefficient géodésique ( $G_i$  ou  $G'_i$ ). L'origine du terme est indiquée par ce dernier : les termes issus de  $V_3$  lunaire ont pour coefficient géodésique  $G'_0, G'_1, G'_2$  ou  $G'_3$ .

Les termes provenant de  $V_2$  solaire ont pour coefficient géodésique  $G_0, G_1$  ou  $G_2$ , de même que les termes issus de  $V_2$  lunaire.

Dans les tableaux, on n'a pas inscrit de coefficient géodésique pour les termes provenant de  $V_2$  lunaire. Une note indique, pour chaque espèce, le coefficient qui est alors sous-entendu.

Les coefficients numériques indiqués correspondent à  $10^5 A_{ijklm}$ .

Notons que le classement des termes par nombre argument croissant est équivalent à un classement par vitesses angulaires croissantes.

Les termes principaux du développement de DOODSON sont homologues des termes du développement quasi-harmonique de DARWIN, c'est-à-dire que leurs arguments diffèrent de quantités petites et lentement variables avec le temps, fonctions essentiellement de  $N'$ . Les symboles qui leur sont attribués sont ceux de la classification de DARWIN.

### 3 - Réponse de l'océan à l'excitation du potentiel

#### 3.1 - Equations des ondes longues

Assimilons, en première approximation, l'eau à un fluide incompressible et supposons qu'on puisse négliger les effets de la turbulence et, a fortiori, ceux de la viscosité. Les équations du mouvement, dans un repère lié à la Terre, sont alors :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{équation de continuité}) \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \operatorname{grad} P - 2\rho \vec{\omega} \wedge \vec{v} + \rho \operatorname{grad} V \quad (\text{équation de conservation de la quantité de mouvement}) \end{array} \right.$$

avec  $\vec{v} = \vec{v}(a, L, G, t)$  vecteur vitesse au point de latitude  $L$ , de longitude  $G$  et situé à la distance  $a$  du centre de la Terre

$P = P(a, L, G, t)$  la pression

$\rho$  la masse volumique, supposée constante

$\vec{g}$  la pesanteur, supposée constante (en négligeant les variations de  $a$  devant le rayon moyen  $a_0$  de la Terre)

$V = V(L, G)$  le potentiel générateur de la marée (en négligeant ses variations le long de la verticale)

$\vec{\omega}$  le vecteur rotation de la Terre supposé constant.

Ces équations sont assorties de conditions aux limites le long des frontières océan-atmosphère (surface) et océan-noyau solide (fond).

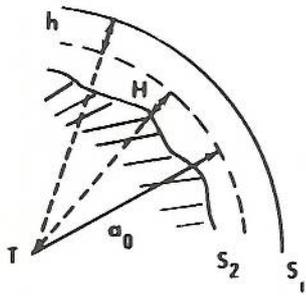


Figure 2

Soit :

$$a(L, G, t) = a_0 + h(L, G, t)$$

l'équation de la surface  $S_1$

$$a(L, G) = a_0 - H(L, G)$$

l'équation du fond  $S_2$

Les conditions aux limites sont :

$$(2) \begin{cases} P(M) = P_0(M) \text{ pression atmosphérique, } \forall M \in S_1 \\ \vec{v}(M) \cdot \vec{n}(M) = 0 \text{ pour } M \in S_2, \vec{n}(M) \text{ étant le vecteur} \\ \text{normal en } M \text{ à } S_2 \end{cases}$$

Les caractéristiques du mouvement dû à la force génératrice des marées justifient deux hypothèses simplificatrices supplémentaires :

- la composante verticale de la vitesse est négligeable devant la composante horizontale
- la vitesse est la même en tous les points d'une verticale :  $\vec{v}$  ne dépend que de  $L, G$  et  $t$ . Néanmoins, pour tenir compte des variations de  $\vec{v}$  au voisinage immédiat du fond (couche limite), on introduit dans l'équation dynamique un terme de frottement au fond :  $\vec{F}(L, G, t)$

Ces hypothèses constituent l'approximation des ondes longues, c'est-à-dire ayant une longueur d'onde grande devant la profondeur des océans, ce qui est le cas des ondes marées.

Soit  $u$  la composante Sud-Nord de  $\vec{v}$

$v$  la composante Est-Ouest

$w$  sa composante verticale.

A partir de l'hypothèse  $w = 0$ , on montre que la pression est hydrostatique :

$$P(L, G, a, t) = P_0(L, G, t) + \rho g (a_0 + h(L, G, t) - a)$$

Comme on ne s'intéresse qu'au mouvement induit par le potentiel  $V$ , on peut supposer que :

$$P_0(L, G, t) = P_0 = \text{constante}$$

Le système (I) se transforme alors en un système d'équations en  $u, v$  et  $h$  :

$$(3) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div} \left[ (H + h) \vec{v} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v} + 2 \vec{\omega}_\Lambda \vec{v} = \vec{\text{grad}} V - g \vec{\text{grad}} h - \frac{1}{\rho} \vec{F}$$

$$\text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} h = h(L, G, t) \\ \vec{v} \left\{ \begin{array}{l} u(L, G, t) \\ v(L, G, t) \\ 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

### 3.2 - Marées océaniques

Au large, les courants de marée sont très faibles ainsi que leurs dérivées spatiales :

$$|\vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}| \ll |\vec{v}|$$

soit  $\frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

D'autre part,  $h$  reste petit devant  $H$  et les pentes de la surface libre et du fond peuvent être négligées dans l'équation de continuité :

$$\text{div} (H + h) \vec{v} \approx H \text{div} \vec{v}$$

Enfin le terme de frottement au fond est négligeable devant les autres forces en présence .

Ces approximations permettent de linéariser les équations ; le système (3) devient :

$$(4) \quad \boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + H \text{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2 \vec{\omega}_\Lambda \vec{v} = \vec{\text{grad}} V - g \vec{\text{grad}} h \end{array}}$$

Ces équations sont celles des marées océaniques .

$$\text{Comme } V(L, G, t) = \sum_{i=1}^N \left\{ V_{1i}(L, G) \cos \mathbf{q}_i t + V_{2i}(L, G) \sin \mathbf{q}_i t \right\} .$$

La solution du système linéaire (4) est de la forme :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^N \left\{ \vec{v}_{1i}(L, G) \cos \mathbf{q}_i t + \vec{v}_{2i}(L, G) \sin \mathbf{q}_i t \right\}$$

$$h = \sum_{i=1}^N \left\{ h_{1i}(L, G) \cos \mathbf{q}_i t + h_{2i}(L, G) \sin \mathbf{q}_i t \right\}$$

La marée océanique est une superposition d'ondes dont les fréquences sont celles des termes du potentiel générateur. La formule harmonique de la marée s'écrit :

$$h(L, G, t) = \sum_{i=1}^N H_i(L, G) \cos(\mathbf{q}_i t - \alpha_i(L, G))$$

où les vitesses angulaires  $\mathbf{q}_i$  se déduisent du développement harmonique du potentiel générateur.

### 3.3 - Marées dans les mers littorales

Dans le cas des mers littorales, les variations spatiales des courants dues à l'influence des côtes interdisent de négliger les termes non linéaires de l'accélération. Quant au terme de frottement de fond, il devient, en profondeur plus faible, comparable à la force de Coriolis. On utilise en général, pour le représenter, une loi empirique du type :

$$\vec{F} = \frac{R |\vec{v}| \vec{v}}{(H+h)}$$

où  $R$  est une constante.

Les équations de la marée deviennent alors :

$$(5) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div} (H+h) \vec{v} = 0 \\ & \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \text{ grad } \vec{v} + 2 \vec{\omega}_\wedge \vec{v} + \frac{R |\vec{v}|}{\rho(H+h)} \vec{v} = \vec{\text{grad}} V - g \vec{\text{grad}} h \end{aligned}$$

On admet que les termes non linéaires restent petits et que la solution peut être obtenue par approximations successives.

Soit  $\vec{v}_0$  et  $h_0$  les solutions des équations linéarisées :

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + H \text{ div } \vec{v}_0 = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + 2 \vec{\omega}_\wedge \vec{v}_0 = \vec{\text{grad}} V - g \vec{\text{grad}} h_0$$

$$\vec{v}_0 = \sum_{i=1}^N \left\{ \vec{v}_{01i}(L, G) \cos \mathbf{q}_i t + \vec{v}_{02i}(L, G) \sin \mathbf{q}_i t \right\}$$

$$h_0 = \sum_{i=1}^N \left\{ h_{01i}(L, G) \cos \mathbf{q}_i t + h_{02i}(L, G) \sin \mathbf{q}_i t \right\}$$

On cherche la solution des équations (5) sous la forme :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$$

$$h = h_0 + h_1$$

avec les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} [(H+h) \vec{v}] \approx H \operatorname{div} \vec{v}_0 + \vec{v}_0 \cdot \vec{\operatorname{grad}} (H+h_0) \\ \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \approx \vec{v}_0 \cdot \operatorname{grad} \vec{v}_0 \\ \frac{R|\vec{v}|}{\rho(h+H)} \vec{v} \approx \frac{R}{\rho H} |\vec{v}_0| \vec{v}_0 \end{array} \right.$$

donc

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_1}{\partial t} = - \vec{v}_0 \cdot \vec{\operatorname{grad}} (H+h_0) \\ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_1 + g \operatorname{grad} h_1 = - \frac{R}{\rho H} |\vec{v}_0| \vec{v}_0 - \vec{v}_0 \cdot \operatorname{grad} \vec{v}_0 \end{array} \right.$$

Calculons les seconds membres :

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 \cdot \operatorname{grad} \vec{v}_0 &= \sum_{i=1}^N \left\{ \left( \vec{v}_{01i} (L, G) \cos \mathbf{q}_i t + \vec{v}_{02i} (L, G) \sin \mathbf{q}_i t \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \sum_{j=1}^N \left\{ \operatorname{grad} \vec{v}_{01j} \cos \mathbf{q}_j t + \operatorname{grad} \vec{v}_{02j} \sin \mathbf{q}_j t \right\} \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\{ \vec{x}_{1ij} \cos (\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j) t + \vec{x}_{2ij} \sin (\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j) t \right. \\ &\quad \left. + \vec{x}_{3ij} \cos (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) t + \vec{x}_{4ij} \sin (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) t \right\} \end{aligned}$$

où les  $\vec{x}_{kij}$  sont fonctions de L et de G.

De même :

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 \operatorname{grad} h_0 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left\{ y_{1ij} \cos (\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j) t + y_{2ij} \sin (\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j) t \right. \\ &\quad \left. + y_{3ij} \cos (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) t + y_{4ij} \sin (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) t \right\} \end{aligned}$$

Considérons maintenant le terme de frottement .

On peut écrire :

$$\vec{v}_0^2 = S^2 (L, G) + T (L, G, t)$$

avec

$$S^2 = \vec{v}_0^2_{11} (L, G) + \vec{v}_0^2_{21} (L, G)$$

Un raisonnement analogue au précédent permet d'exprimer T par un développement du type :

$$T(L, G, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ d_{1ij} \cos(q_i + q_j) t + d_{2ij} \sin(q_i + q_j) t \right. \\ \left. + d_{3ij} \cos(q_i - q_j) t + d_{4ij} \sin(q_i - q_j) t \right\}$$

L'onde d'indice l est dite, par définition, onde dominante si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} S > 0 \\ S^2 > |T| \end{cases}$$

La première condition exprime que l'hodographe du vecteur courant associé à l'onde dominante ne se réduit nulle part à un point. Il résulte de la seconde condition que l'amplitude maximum de la vitesse due à l'onde dominante dépasse, au sens strict, la vitesse résultante créée par l'ensemble des autres composantes. La notion ainsi introduite est empirique : elle ne s'était sur aucune considération théorique mais semble en accord avec les observations. En marée semi-diurne, c'est  $M_2$  qui joue le rôle d'onde dominante.

On peut donc écrire :

$$|\vec{v}_0| = \sqrt{v_0^2} = S \sqrt{1 + \frac{T}{S^2}}$$

avec  $S \neq 0$  et  $\left| \frac{T}{S^2} \right| < 1$

On peut donc développer le radical en série très rapidement convergente :

$$\sqrt{2} |\vec{v}_0| \approx S \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{T}{S^2} \right)$$

Or  $T$  est une somme de termes de pulsations  $q_i \pm q_j$ .

En multipliant  $|\vec{v}_0|$  par  $\vec{v}_0$  on obtient des termes de pulsations

$$q_i \pm q_j \pm q_k.$$

Les seconds membres des équations (6) sont donc des combinaisons linéaires de termes de pulsations  $q_i$ ,  $q_i \pm q_j$ ,  $q_i \pm q_j \pm q_k$  avec  $i, j$  et  $k$  variant de 1 à  $N$ . Les équations étant linéaires en  $h_1$  et  $v_1$ , la solution est une combinaison linéaire de termes de mêmes pulsations.

En poussant le développement de la solution aux ordres suivants, on introduit dans la solution des termes d'interaction d'ordre 4 et plus.

En conclusion, la présence de termes non linéaires dans les équations du mouvement explique l'apparition, près des côtes, d'ondes d'interaction ayant des pulsations égales à la somme ou à la différence des pulsations de deux, trois, etc... termes du potentiel.

Ces ondes sont appelées ondes de petits fonds (shallow water constituents) On distingue :

- les ondes supérieures dont les pulsations sont des multiples entiers des termes du potentiel ( $i = j$  ;  $i = j = k$ )
- les ondes composées dont les pulsations sont des combinaisons des pulsations de plusieurs termes du potentiel.

Les ondes supérieures habituellement prises en compte sont celles issues de  $M_2$  et  $S_2$ . Les ondes composées sont beaucoup plus nombreuses ; on considère habituellement celles provenant de combinaisons de  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_2$ ,  $N_2$ ,  $K_1$  et  $O_1$ .

TABLEAU 4

Ondes de petits fonds

Symbole	Nombre argument	Symbole	Nombre argument	Symbole	Nombre argument	Symbole	Nombre argument
<b>Espèce semi-diurne</b>							
2NS <sub>2</sub>	217 755	2NMS <sub>4</sub>	417 555	3MNK <sub>6</sub>	625 655	2 (MN) <sub>8</sub>	835 755
3MS <sub>2</sub>	219 555	2MMS <sub>4</sub>	419 555	3MNS <sub>6</sub>	627 655	3MN <sub>8</sub>	845 655
MNK <sub>2</sub>	225 655	2MNS <sub>4</sub>	427 655	3MYS <sub>6</sub>	629 455	M <sub>8</sub>	855 555
MNS <sub>2</sub>	227 655	2MYS <sub>4</sub>	429 455	2NM <sub>6</sub>	635 755	2MSN <sub>8</sub>	863 655
2MS <sub>2</sub>	237 555	N <sub>4</sub>	435 755	4MS <sub>6</sub>	637 555	2MNK <sub>8</sub>	865 655
2MN <sub>2</sub>	265 455	3MS <sub>4</sub>	437 555	2MN <sub>6</sub>	645 655	3MS <sub>8</sub>	873 555
MSN <sub>2</sub>	283 455	MN <sub>4</sub>	445 655	2MY <sub>6</sub>	647 455	3MK <sub>8</sub>	875 555
2SM <sub>2</sub>	291 555	MY <sub>4</sub>	447 455	3MSK <sub>6</sub>	653 555	2SMN <sub>8</sub>	881 655
SKM <sub>2</sub>	293 555	2MSK <sub>4</sub>	453 555	M <sub>6</sub>	655 555	2MSL <sub>8</sub>	883 455
<b>Espèce tiers-diurne</b>							
MQ <sub>3</sub>	335 655	M <sub>4</sub>	455 555	3MKS <sub>6</sub>	657 555	2 (MS) <sub>8</sub>	891 555
2MK <sub>3</sub>	345 555	2MKS <sub>4</sub>	457 555	MSN <sub>6</sub>	663 655	2MSK <sub>8</sub>	893 555
SO <sub>3</sub>	363 555	SN <sub>4</sub>	463 655	2ML <sub>6</sub>	665 455		
MS <sub>3</sub>	364 555	3MN <sub>4</sub>	465 455	2MT <sub>6</sub>	672 556		
MK <sub>3</sub>	365 555	2SMK <sub>4</sub>	471 555	2MS <sub>6</sub>	673 555		
SP <sub>3</sub>	381 555	MT <sub>4</sub>	472 556	2MK <sub>6</sub>	675 555		
S <sub>3</sub>	382 555	MS <sub>4</sub>	473 555	2SN <sub>6</sub>	681 655		
SK <sub>3</sub>	383 555	MK <sub>4</sub>	475 555	3MSN <sub>6</sub>	683 455		
K <sub>3</sub>	385 555	2SNM <sub>4</sub>	481 655	3MKN <sub>6</sub>	685 455		
		2MSN <sub>4</sub>	483 455	2SM <sub>6</sub>	691 555		
		2MKN <sub>4</sub>	485 455	MSK <sub>6</sub>	693 555		
		S <sub>4</sub>	491 555	S <sub>6</sub>	6E(-1)555		
		SK <sub>4</sub>	493 555				

Le tableau 4 donne les symboles et les nombres arguments des ondes supérieures ou composées susceptibles d'avoir quelque importance .

Les symboles sont formés à partir de ceux des ondes génératrices ; par exemple :

$$\begin{aligned} MS_4 &= M_2 + S_2 \\ M_6 &= M_2 + M_2 + M_2 \\ 2MN_6 &= M_2 + M_2 + N_2 \\ 2MSN_4 &= M_2 + M_2 + S_2 - N_2 \\ 3MN_4 &= M_2 + M_2 + M_2 - N_2 \end{aligned}$$

Certaines ondes de petits fonds ont même vitesse angulaire que des composantes astronomiques : c'est le cas de  $2 MS_2 (M_2 + M_2 - S_2)$  confondue avec  $\mu_2$  et de  $2 MN_2 (M_2 + M_2 - N_2)$  confondue avec  $L_2$

(voir tableau 4)

L'importance relative des ondes de petits fonds dépend des conditions locales qui peuvent entraîner l'amplification de certaines ondes par résonance ou réflexion.

$M_2$  est en principe plus importante que  $S_2$  : les ondes supérieures  $M_4$ ,  $M_6$  et  $M_8$  sont les plus importantes, tandis que  $S_6$  et  $S_8$  peuvent être, en général, négligées.

Les ondes composées provenant de  $M_2$  et  $S_2$  sont en général les plus importantes. Ce sont, par ordre d'amplitudes décroissantes :  $MS_4$ ,  $2MS_6$ ,  $2SM_6$

$2 MS_2$ ,  $3 MS_8$ , etc... Ensuite viennent les combinaisons de  $M_2$  et  $N_2$  et les combinaisons de  $M_2$  et  $K_2$  .

Les combinaisons de  $M_2$  avec les autres ondes ne sont pas toujours négligeables, ni les combinaisons triples de  $M_2$ ,  $S_2$  et  $N_2$  .

#### 4 - Phénomènes météorologiques

Les variations de température, de pression atmosphérique, de vitesse et de direction du vent entraînent des variations de la hauteur d'eau. Ces variations sont essentiellement irrégulières et imprévisibles, mais une partie au moins présente une certaine régularité et peut s'exprimer par une somme de termes périodiques. Les composantes météorologiques prises en compte sont :

Soit  $t_o$  l'heure temps universel de l'instant considéré et

$t$  l'heure UT + n :

$$t_o = t - n$$

Soit  $V_{ooi}$  la valeur de l'argument astronomique  $V_i$  à l'instant  $t_o = 0$  et pour la longitude origine ( $G = 0$ ). On écrit :

$$h(t) = \sum_i h_i \cos (V_{ooi} + q_i t - g_{ni})$$

et on appelle  $g_{ni}$  la situation relative de l'onde  $i$  rapportée au méridien de Greenwich et à l'heure UT + n .

En remplaçant  $t$  par  $t_o + n$ , il vient :

$$h(t) = \sum_i h_i \cos (V_{ooi} + q_i t_o + q_i n - g_{ni})$$

or

$$h(t_o \text{ UT}) = h(t \text{ UT} + n)$$

$$= \sum_i h_i \cos (V_{ooi} + q_i t_o - g_{oi})$$

donc

$$g_{ni} = g_{oi} + q_i n$$

La situation absolue  $\kappa_i$  (kappa) n'est plus guère utilisée car son emploi exige d'opérer en temps civil local.

Le temps civil local  $t_G$  à la longitude de G (comptée positivement vers l'Ouest) est relié à  $t_o$  au même instant par :

$$t_G = t_o - \frac{G}{15}$$

comme

$$\tau = 15 t_G + h - s$$

$$\tau = 15 t_o + h - s - G$$

donc

$$V_{Gi}(t_G) = V_{oi}(t_o) - n_1 G$$

ou

$$V_{Goi}(t_G=0) = V_{oi}(t_o = \frac{G}{15}) - n_1 G$$

soit

$$V_{Goi} = V_{ooi} + q_i \frac{G}{15} - n_1 G$$

comme

$$h(t_G \text{ temps local}) = h(t_o \text{ UT})$$

$$V_{Goi} + q_i t_G - \kappa_i = V_{ooi} + q_i t_o - g_{oi}$$

et

$$\kappa_i = g_{oi} - n_i G$$

où  $n_i$  est le numéro de l'espèce.

Les quantités  $h_i$  et  $g_{ni}$  (ou  $\kappa_i$ ) sont appelées constantes harmoniques de l'onde  $i$ .

Leur détermination est le but de l'analyse harmonique.

-----

ETUDE DE LA MAREE D'UN PORT

-----

1 - Généralités

Le développement harmonique complet de la marée fait apparaître un très grand nombre de termes : près de 400 provenant du développement du potentiel générateur, auxquels il faut ajouter environ 70 termes de petits fonds. Mais, tous ces termes n'ont pas la même importance et, en dehors de cas très particuliers (embouchures de fleuves par exemple), un petit nombre d'ondes ont une amplitude suffisamment grande pour imposer les caractéristiques essentielles de la marée d'un port. Ces ondes appartiennent aux espèces diurne et semi-diurne et ce sont pratiquement toujours les mêmes. En effet, on peut caractériser chaque onde par un coefficient d'amplification, lié aux phénomènes hydrodynamiques de propagation et égal au rapport de l'amplitude de l'onde à celle du terme correspondant du potentiel. Les variations de ce coefficient d'amplification en fonction de la fréquence des ondes sont suffisamment faibles (Figure 1) pour que la hiérarchie des ondes d'une même espèce ne soit pas perturbée (Figure 2). Par contre l'importance relative d'une espèce par rapport à une autre peut varier considérablement d'un point à un autre : le rapport des amplitudes de  $M_2$  et  $K_1$  est par exemple de 31,4 à Brest contre 0,7 à Fort de France.

Le tableau 1 donne les ondes principales de chaque espèce et le coefficient numérique du terme correspondant du potentiel défini au chapitre VI (voir § 2.3.2.) .

A partir des constantes harmoniques de ces ondes, il est possible de déterminer les caractéristiques fondamentales de la marée d'un port, à savoir le nombre de pleines et basses mers par jour et leur hauteur .

TABLEAU 1  
Principales ondes de la marée

Espèce	Symbole	Nombre argument	Coeff. numérique	Vitesse angul (°/heure)
Diurne	$K_1$	165 555	0,53	15,04
	$O_1$	145 555	0,38	13,94
	$P_1$	163 555	0,18	14,96
Semi- Diurne	$M_2$	255 555	0,91	28,98
	$S_2$	273 555	0,42	30,00
	$N_2$	245 655	0,17	28,44
	$K_2$	275 555	0,11	30,08

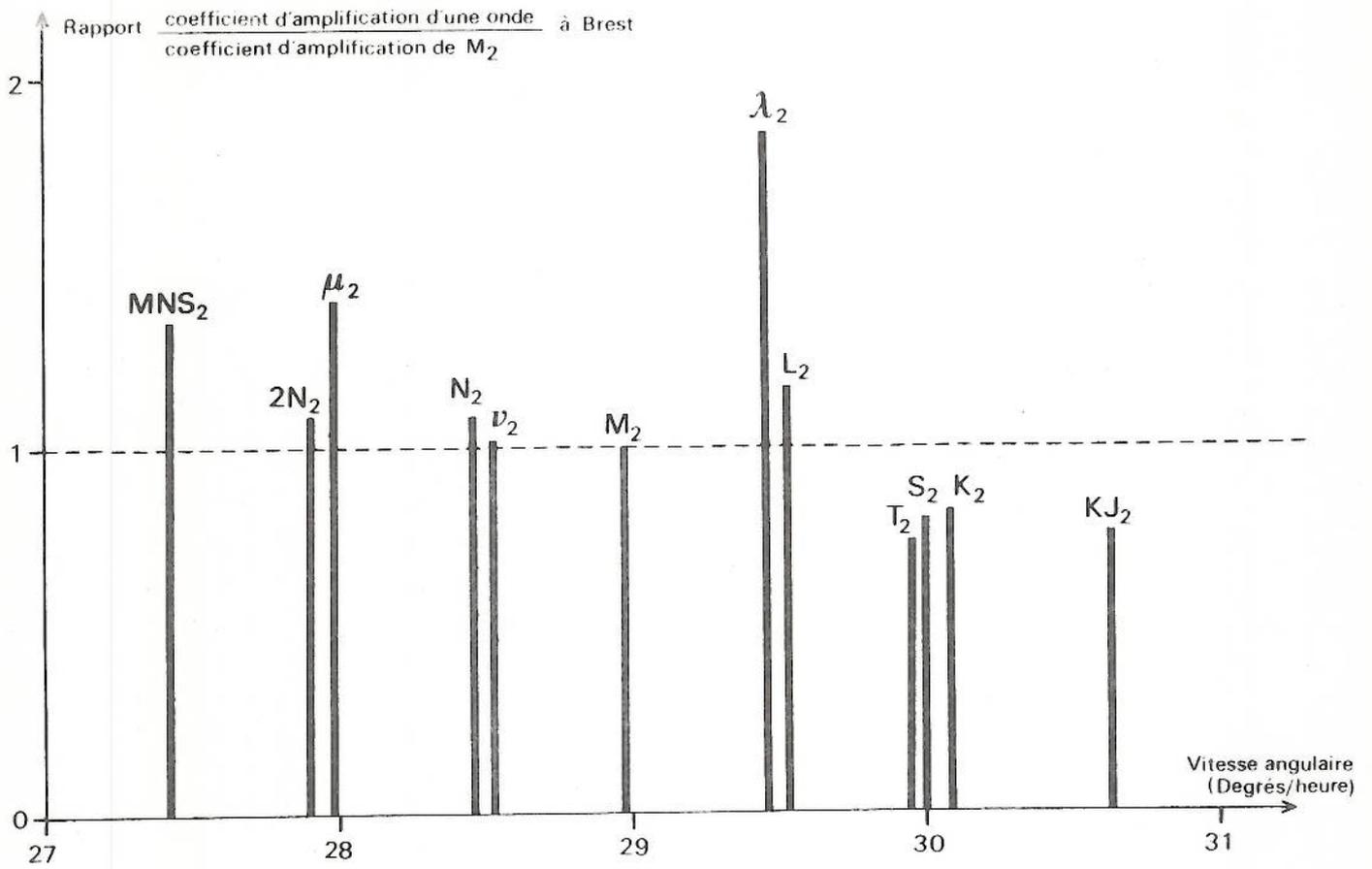


Figure 1 — Coefficient d'amplification des ondes semi-diurnes à Brest

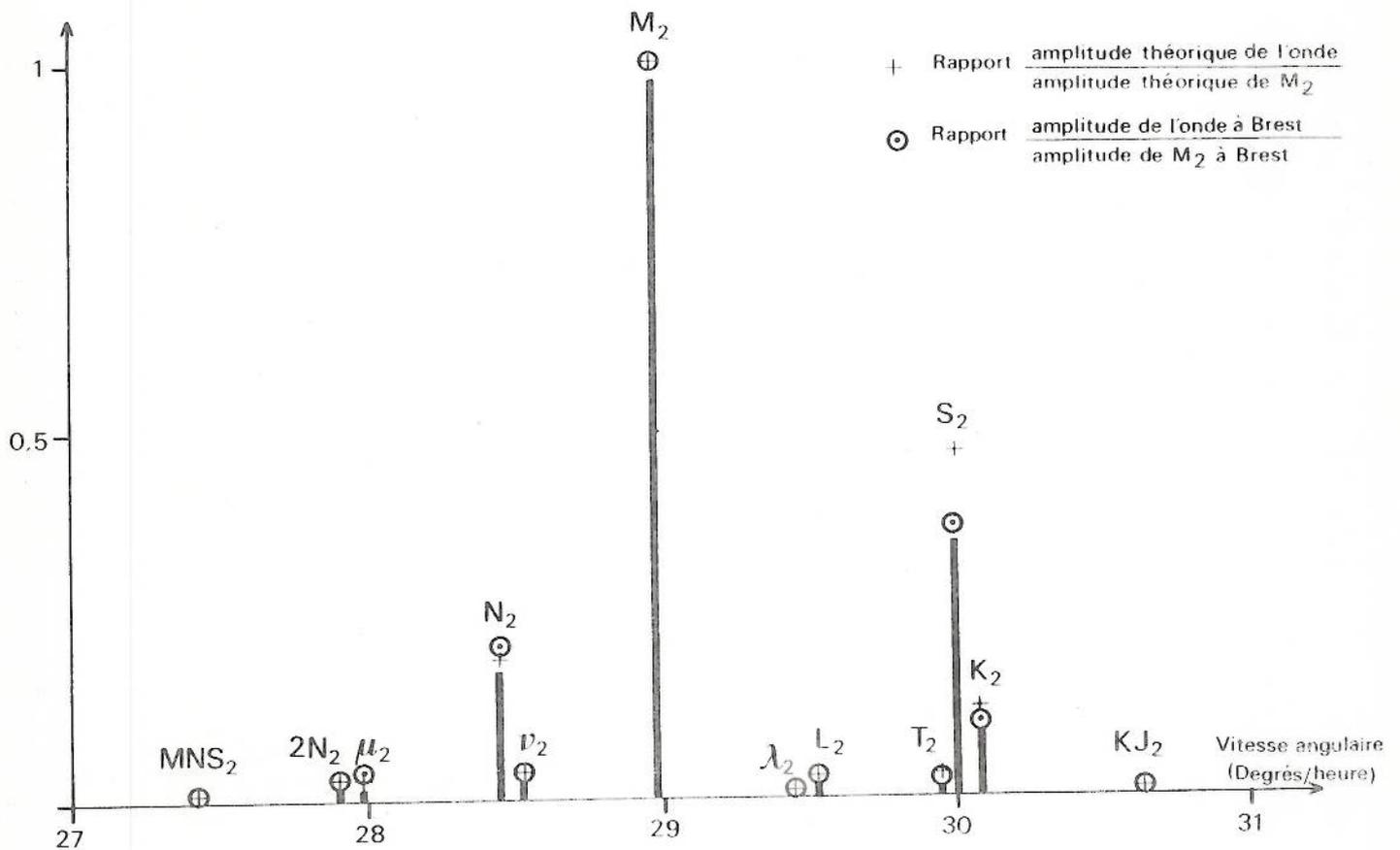


Figure 2 — Hiérarchie des ondes semi-diurnes

## 2 - Etude de la marée semi-diurne

La marée semi-diurne résulte essentiellement de la superposition de 4 ondes :  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$ , et  $K_2$ . Les caractères fondamentaux lui sont imposés par  $M_2$  qui est en général nettement la plus importante des quatre.

### 2.1 - L'onde lunaire moyenne $M_2$

L'onde  $M_2$  représente la marée produite par une lune fictive qui décrirait d'un mouvement uniforme une orbite circulaire située dans le plan de l'équateur. Sa contribution à la marée totale est :

$$h(t) = h_{M_2} \cos(2\tau - K_{M_2})$$

où  $\tau$  est le temps lunaire moyen local réduit en angle.

Cette marée partielle présente donc deux pleines mers et deux basses mers par jour lunaire moyen de 24 heures 51 minutes. Pleines et basses mers retardent donc de 51 minutes d'un jour à l'autre. La pleine mer  $M_2$  suit le passage inférieur ou supérieur de la lune moyenne au méridien du lieu de

$$\frac{K_{M_2} (^\circ)}{28,98} \text{ heures (établissement moyen)}$$

### 2.2 - L'onde solaire moyenne $S_2$

L'onde  $S_2$  représente la marée que produirait un soleil fictif parcourant d'un mouvement uniforme une orbite circulaire située dans le plan de l'équateur. La marée partielle due à  $S_2$  s'exprime par :

$$h(t) = h_{S_2} \cos(2T - K_{S_2})$$

où  $T$  est le temps solaire moyen local réduit en angle.

Les deux pleines mers et les deux basses mers quotidiennes de  $S_2$  ont lieu chaque jour à la même heure. La pleine mer suit le passage inférieur ou supérieur du soleil moyen au méridien du lieu de

$$\frac{K_{S_2} (^\circ)}{30} \text{ heures .}$$

Le rapport  $\frac{h_{S_2}}{h_{M_2}}$  est théoriquement égal à 0,47 (rapport des amplitudes des termes correspondants du potentiel générateur) .

Il varie d'une région à l'autre : il est égal à 0,37 à Brest et ses valeurs extrêmes sont voisines respectivement de 1 et de 0,15 .

La superposition de  $S_2$  modifie la régularité des pleines et basses mers de la marée réduite à  $M_2$ . Les deux ondes sont en phase et il y a vive-eau lorsque :

$$2T - K_{S_2} = 2\tau - K_{M_2} + 2k\pi \quad (1)$$

$$\text{soit } s - h = \frac{1}{2}(K_{S_2} - K_{M_2}) + k\pi$$

---

(1) Dans cette relation et dans les relations analogues qui font intervenir des combinaisons linéaires de situations absolues des ondes, on peut remplacer les situations  $K$  absolues par les situations relatives à l'heure UT.

Les vives-eaux suivent donc les syzygies (  $s-h = k\pi$  ) de

$$T_2 = \frac{K_{S_2} - K_{M_2}}{2 (s-h)} = \frac{(K_{S_2} - K_{M_2}) (^\circ)}{1.02} \text{ heures}$$

De même, les mortes-eaux, oppositions de phase  $M_2$  et  $S_2$ , suivent les quadratures (  $s-h = (k+\frac{1}{2})\pi$  ) de la même quantité  $T_2$  qui représente l'âge de la marée réduite à  $M_2$  et  $S_2$ . Les vives-eaux (et les mortes-eaux) se produisent tous les

$$\frac{180}{24 \times 0,51} = 14,77 \text{ jours}$$

Notons qu'en général, l'instant de la vive-eau ou de la morte-eau ne coïncide pas avec l'instant exact de la pleine mer qui est défini par :

$$28,98 h_{M_2} \sin ( 2\tau - K_{M_2} ) + 30 h_{S_2} \sin ( 2T - K_{S_2} ) = 0$$

Mais, le déphasage de  $M_2$  et  $S_2$  varie très lentement, à raison de 1,02 degré/heure : on peut considérer qu'il est constant dans un intervalle de 12 heures centré sur l'instant exact de la vive-eau ou de la morte-eau. L'instant de la pleine mer la plus proche de la vive-eau ou de la morte-eau est donc très peu différent de celui de la pleine mer de  $M_2$ .

En vive-eau, il est donné par les relations :

$$t \text{ (heures)} = \frac{K_{S_2} (^\circ)}{30} \text{ en temps solaire local (à 12 heures près)}$$

$$\text{ou } t \text{ (heures)} = \frac{g_{nS_2} (^\circ)}{30} \text{ en temps du fuseau } n \text{ (à 12 heures près)}$$

et en morte-eau

$$t \text{ (heures)} = \frac{K_{S_2} (^\circ)}{30} + 6 \text{ en temps solaire local (à 12 heures près)}$$

$$t \text{ (heures)} = \frac{g_{nS_2} (^\circ)}{30} + 6 \text{ en temps du fuseau } n \text{ (à 12 heures près)}$$

Les pleines mers de vive-eau et de morte-eau ont donc toujours lieu pratiquement à la même heure.

La hauteur de la pleine mer de vive-eau (morte-eau) est, pour la même raison, très peu différente de  $h_{M_2} + h_{S_2}$  (  $h_{M_2} - h_{S_2}$  ). Des résultats analogues s'appliquent aux basses mers de vive-eau et de morte-eau.

### 2.3 - L'onde elliptique lunaire moyenne $N_2$

L'onde  $N_2$  est induite par les variations de la distance de la Terre à la Lune; Elle a pour expression :

$$h(t) = h_{N_2} \cos ( 2\tau - s + p - K_{N_2} )$$

Sa période est de 12 heures 40 minutes et elle présente en moyenne deux pleines mers et deux basses mers par jour qui retardent de 1 heure 19 minutes d'un jour à l'autre.

Le rapport  $\frac{h_{N_2}}{h_{M_2}}$  est théoriquement égal à 0,19. Les vitesses angulaires de  $M_2$  et  $N_2$  diffèrent de la quantité (s-p) soit 0,54°/heure. Les deux ondes sont en phase lorsque :

$$s-p = \kappa_{M_2} - \kappa_{N_2} + 2 k \pi$$

soit  $\frac{(\kappa_{M_2} - \kappa_{N_2})}{0,54}$  heures après le passage de la Lune par son périégée ( $s-p = 2 k \pi$ ). Elles seront en opposition de phase  $\frac{\kappa_{M_2} - \kappa_{N_2}}{0,54}$  heures après le passage de la Lune par son apogée ( $s-p = (2 k + 1) \pi$ ).

Les trois ondes  $M_2$ ,  $S_2$  et  $N_2$  sont en phase lorsque :

$$s-h = \frac{\kappa_{S_2} - \kappa_{M_2}}{2} + k_1 \pi \quad (M_2 \text{ et } S_2 \text{ en phase})$$

et  $s-p = \kappa_{M_2} - \kappa_{N_2} + 2 k_2 \pi$  ( $M_2$  et  $N_2$  en phase)

ce qui définit les vives-eaux de périégée dont la période est de :

$$\frac{180}{24 \times (h-p)} = 205,89 \text{ jours}$$

L'influence de  $N_2$  modifie en particulier l'amplitude des vives-eaux, définies par :

$$\tau \approx \frac{\kappa_{M_2}}{2} + k_3 \pi$$

$$s-h \approx \frac{\kappa_{S_2} - \kappa_{M_2}}{2} + k_1 \pi$$

La phase de  $N_2$  s'écrit alors :

$$2\tau - s+p - \kappa_{N_2} \approx p-h + \frac{3\kappa_{M_2} - \kappa_{S_2} - 2\kappa_{N_2}}{2} + k_1 \pi$$

et l'amplitude des vives-eaux est peu différente de :

$$h_{M_2} + h_{S_2} \pm h_{N_2} \cos \left( p-h + \frac{3\kappa_{M_2} - \kappa_{S_2} - 2\kappa_{N_2}}{2} \right)$$

où le signe + s'applique à une vive-eau ( $k_1$  pair) et le signe - à la suivante ( $k_1$  impair).  $N_2$  agit donc en sens contraire au cours de deux vives-eaux successives : elle augmente l'amplitude de l'une et diminue celle de l'autre.

#### 2.4 - L'onde déclinatoire luni-solaire $K_2$ (ou onde sidérale semi-diurne)

Cette onde provient de la combinaison d'un terme d'origine lunaire et d'un terme d'origine solaire. Elle est liée aux variations des déclinaisons de la Lune et du Soleil.

Son expression est :

$$h_{K_2} \cos ( 2\tau + 2s - \mathcal{M}_{K_2} )$$

Elle présente deux pleines mers et deux basses mers par jour sidéral de 23 heures 56 minutes.

Le rapport  $\frac{h_{K_2}}{h_{M_2}}$  est théoriquement égal à 0,13. Les vitesses angulaires de  $M_2$  et  $K_2$  diffèrent de la quantité  $2 \dot{s}$  soit 1,10 degré/heure. Les deux ondes sont en phase lorsque :

$$s = \frac{\mathcal{M}_{M_2} - \mathcal{M}_{K_2}}{2} + k\pi$$

c'est-à-dire, à la différence des situations près, au voisinage du passage de la Lune dans le plan de l'équateur. Les deux ondes sont en opposition lorsque la Lune est au voisinage de ses tropiques.

Les vitesses angulaires de  $S_2$  et  $K_2$  diffèrent de la quantité  $2 \dot{h}$  soit 0,08 degré/heure. Les deux ondes sont en phase lorsque :

$$h = \frac{\mathcal{M}_{K_2} - \mathcal{M}_{S_2}}{2} + k\pi$$

C'est-à-dire à la différence des situations près, au voisinage des équinoxes ( $h = k\pi$ ). Elles sont en opposition au voisinage des solstices ( $h = (k + \frac{1}{2})\pi$ ). Notons qu'en général, la différence des situations de  $S_2$  et  $K_2$  est très faible.

Les trois ondes  $M_2$ ,  $S_2$  et  $K_2$  sont en phase lors des vives-eaux d'équinoxe définies par :

$$s-h = \frac{\mathcal{M}_{S_2} - \mathcal{M}_{M_2}}{2} + k_1\pi \quad (M_2 \text{ et } S_2 \text{ en phase})$$

$$h = \frac{\mathcal{M}_{K_2} - \mathcal{M}_{S_2}}{2} + k_2\pi \quad (K_2 \text{ et } S_2 \text{ en phase})$$

L'amplitude des vives-eaux produites par  $M_2$ ,  $S_2$  et  $K_2$  est peu différente de :

$$h_{M_2} + h_{S_2} + h_{K_2} \cos ( 2h + \mathcal{M}_{S_2} - \mathcal{M}_{K_2} )$$

Sous l'influence combinée de  $N_2$  et  $K_2$  l'amplitude des vives-eaux :

$$h_{M_2} + h_{S_2} + h_{N_2} \cos ( p-h + \frac{3\mathcal{M}_{M_2} - \mathcal{M}_{S_2} - 2\mathcal{M}_{N_2}}{2} ) + h_{K_2} \cos ( 2h + \mathcal{M}_{S_2} - \mathcal{M}_{K_2} )$$

est relativement variable. Les plus grandes vives-eaux de l'année ont lieu au voisinage des équinoxes mais l'influence de  $N_2$  est suffisamment importante pour que l'époque exacte varie sensiblement selon les années. Elles ont lieu en fait entre février et mai d'une part et entre août et décembre d'autre part.

Les quatre ondes  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $N_2$  et  $K_2$  sont en phase lorsque :

$$s-h = \frac{K_{S2} - K_{M2}}{2} + k_1 \pi \quad (M_2 \text{ et } S_2 \text{ en phase})$$

$$h = \frac{K_{K2} - K_{S2}}{2} + k_2 \pi \quad (S_2 \text{ et } K_2 \text{ en phase})$$

$$s-p = K_{M2} - K_{N2} + 2 k_3 \pi \quad (M_2 \text{ et } N_2 \text{ en phase})$$

Ces vives-eaux équinoxiales de périgée ont lieu une fois tous les 8,85 ans, période de révolution du périgée lunaire. Ce sont à peu de choses près les plus grandes marées possibles, du moins dans les ports à marée semi-diurne prépondérante.

### 3 - Etude de la marée diurne

La marée diurne résulte essentiellement de la superposition de 3 ondes :  $K_1$ ,  $O_1$  et  $P_1$ . En général, la différence d'amplitude entre les deux plus importantes,  $K_1$  et  $O_1$ , est beaucoup plus faible que celle qui existe entre  $M_2$  et  $S_2$ ,  $O_1$  pouvant même parfois dépasser  $K_1$ . Aussi, la marée diurne, même limitée à  $K_1$  et  $O_1$ , présente des variations d'amplitude beaucoup plus grandes que la marée semi-diurne.

#### 3.1 - L'onde déclinatoire luni-solaire $K_1$ (ou onde sidérale diurne)

L'onde  $K_1$  est, comme  $K_2$ , la résultante d'une composante lunaire et d'une composante solaire induites par les variations de déclinaison de la Lune et du Soleil. La hauteur d'eau associée a pour expression :

$$h_{K_1} \cos \left( \tau + s + \frac{\pi}{2} - K_{K_1} \right)$$

Elle présente une pleine mer et une basse mer par jour sidéral de 23 heures 56 minutes.

#### 3.2 - L'onde lunaire diurne $O_1$

Cette onde provient des variations de déclinaison de la Lune. Son expression est :

$$h_{O_1} \cos \left( \tau - s - \frac{\pi}{2} - K_{O_1} \right)$$

et sa période est de 25 heures 49 minutes.

Le rapport  $\frac{h_{O_1}}{h_{K_1}}$  est théoriquement égal à 0,71 ; il vaut 1,03 à Brest.

Les deux ondes  $O_1$  et  $K_1$  sont en phase et il y a vive-eau de la marée diurne lorsque :

$$\tau - s - \frac{\pi}{2} - \kappa_{O_1} = \tau + s + \frac{\pi}{2} - \kappa_{K_1} + 2k\pi$$

$$\text{soit } s = \frac{\kappa_{K_1} - \kappa_{O_1}}{2} - \frac{\pi}{2} + k\pi$$

La vive-eau diurne a donc lieu, à la différence de situations près, au voisinage du passage de la Lune par ses tropiques ( $s = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$ )

La morte-eau diurne, opposition de  $K_1$  et  $O_1$ , a lieu au voisinage du passage de la Lune par l'équateur ( $s = k\pi$ ).

Les vives-eaux (et les mortes-eaux) diurnes se produisent tous les

$$\frac{180}{24 \times \dot{s}} = 13,66 \text{ jours. Elles suivent le passage de la Lune à ses tropiques (à l'équateur) de la quantité } T_1 \text{ (heures) } = \frac{(\kappa_{K_1} - \kappa_{O_1})(^\circ)}{1,10}$$

Les phases de  $K_1$  et  $O_1$  restant peu différentes au voisinage de la vive-eau, l'heure de la pleine mer la plus voisine est peu différente de l'heure de la pleine mer de  $K_1$  :

$$\tau + s + \frac{\pi}{2} - \kappa_{K_1} = 2k\pi$$

$$\text{soit } t \text{ (heures) } = \frac{\kappa_{K_1}(^\circ) - h(^\circ)}{15} - 6 \text{ en temps solaire local.}$$

Elle avance donc de  $\frac{0,98 \times 13,66 \times 60}{15} = 54$  minutes d'une vive-eau à la suivante.

La hauteur de la pleine mer de vive-eau diurne est peu différente de  $(h_{K_1} + h_{O_1})$ . Celle de morte-eau est voisine de  $(h_{K_1} - h_{O_1})$ . Les amplitudes de  $K_1$  et  $O_1$  étant voisines,

la marée diurne réduite à ces deux ondes est pratiquement nulle au voisinage de la morte-eau.

### 3.3 - L'onde solaire diurne principale $P_1$

L'onde  $P_1$  résulte des variations de déclinaison du Soleil.

La hauteur associée a pour expression :

$$h_{P_1} \cos\left(\tau + s - 2h - \frac{\pi}{2} - \kappa_{P_1}\right)$$

$$\text{ou } h_{P_1} \cos\left(\tau - h - \frac{\pi}{2} - \kappa_{P_1}\right)$$

Elle suit donc pratiquement le soleil moyen, sa période étant de 24 heures 04 minutes.

Le rapport  $h_{P_1}/h_{K_1}$  est théoriquement égal à 0,33 (0,37 à Brest).  $P_1$  et  $K_1$  sont en phase lorsque :

$$h = \frac{\kappa_{K_1} - \kappa_{P_1}}{2} - \frac{\pi}{2} + k\pi$$

c'est-à-dire, à la différence de situation près, au voisinage des solstices. Elles sont en opposition au voisinage des équinoxes.

L'amplitude des vives-eaux de la marée réduite à  $K_1$ ,  $O_1$  et  $P_1$  est très peu différente de :

$$h_{K_1} + h_{O_1} - h_{P_1} \cos(2h - \mathcal{M}_{K_1} + \mathcal{M}_{P_1})$$

Elle est maximum au voisinage des solstices et minimum au voisinage des équinoxes.

#### 4 - Influence des ondes supérieures et composées

Considérons une marée réduite aux ondes  $M_2$  et  $M_4$ . La hauteur par rapport au niveau moyen est donnée par la formule :

$$h = h_{M_2} \cos(2\tau - \mathcal{M}_{M_2}) + h_{M_4} \cos(4\tau - \mathcal{M}_{M_4})$$

Les pleines et basses mers sont définies par :

$$\frac{dh}{dt} = 0$$

Soit

$$h_{M_2} \sin(2\tau - \mathcal{M}_{M_2}) + 2h_{M_4} \sin(4\tau - \mathcal{M}_{M_4}) = 0$$

L'amplitude de l'onde  $M_4$  étant petite devant celle de  $M_2$ , les instants des extremums diffèrent peu de ceux de  $M_2$  définis par :

$$\tau_0 = \frac{\mathcal{M}_{M_2}}{2} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \text{ entier})$$

La quantité

$$u = \tau - \tau_0$$

reste petite et les extremums de la marée composée sont définis avec une précision suffisante par :

$$(-1)^k h_{M_2} u + 4h_{M_4} u \cos(2\mathcal{M}_{M_2} - \mathcal{M}_{M_4}) + h_{M_4} \sin(2\mathcal{M}_{M_2} - \mathcal{M}_{M_4}) = 0$$

Soit

$$u = - \frac{\sin(2\mathcal{M}_{M_2} - \mathcal{M}_{M_4})}{(-1)^k \frac{h_{M_2}}{h_{M_4}} + 4\cos(2\mathcal{M}_{M_2} - \mathcal{M}_{M_4})}$$

Le décalage  $u$  a la même valeur pour deux pleines mers ou deux basses mers consécutives mais il prend des valeurs différentes pour deux extremums consécutifs. Suivant la valeur de  $(2\mathcal{M}_{M_2} - \mathcal{M}_{M_4})$ , c'est le montant ou le perdant qui dure plus longtemps.

Les hauteurs des pleines et basses mers ont pour expression :

$$h = (-1)^k h_{M_2} + h_{M_4} \cos(2\mathcal{M}_{M_2} - \mathcal{M}_{M_4})$$

Elles sont donc toutes décalées d'une même quantité, ce qui implique que le niveau de mi-marée est différent du niveau moyen.

A titre d'exemple pour Brest

$$h_{M_2} = 2,04 \text{ m} ; \quad h_{M_4} = 0,05 \text{ m}$$

$$2M_2 - M_4 = 112^\circ$$

On trouve

$$u = -1,35^\circ \text{ en pleine mer}$$

et 
$$u = +1,26^\circ \text{ en basse mer}$$

ce qui correspond à un décalage en temps de  $\pm 5 \text{ min}$  par rapport aux extrémums de  $M_2$ . Le perdant de la marée réduite à  $(M_2 + M_4)$  durerait  $20 \text{ min}$  de plus que le montant et le niveau de mi-marée serait situé à  $2 \text{ cm}$  en-dessous du niveau moyen. Ces résultats sont à rapprocher des valeurs observées qui sont respectivement  $16 \text{ min}$  et  $7 \text{ cm}$ , pour la marée totale.

Les autres ondes supérieures ou composées produisent des effets analogues dont la superposition explique les particularités de la marée dans certains ports où elles sont importantes.

#### 5 - Les types de marée

La marée totale est constituée essentiellement par la superposition en proportion variable selon les régions et selon le temps, d'une marée semi-diurne et d'une marée diurne. Les variations réelles du niveau de l'eau dues à la marée, qui ne suivent déjà pas de loi simple dans le cas d'une marée semi-diurne ou diurne pure, sont donc complexes. Il faut tenir compte en outre des ondes à longue période ou de petits fonds.

S'il existe des régions où la marée se réduit soit à une marée semi-diurne - c'est le cas de Brest et plus généralement des côtes d'Europe Occidentale - soit, plus rarement, à une marée diurne - dans le golfe du Tonkin par exemple, il existe aussi en divers lieux des anomalies pour lesquelles les rapports des amplitudes des ondes principales -  $K_1$  et  $O_1$  d'une part,  $M_2$  et  $S_2$  d'autre part - s'écartent beaucoup de leur valeur théorique. Le tableau 2 donne, à titre d'exemple, les amplitudes des ondes principales à Rembang (Java)

Onde	Amplitude (cm)
$M_2$	4
$S_2$	2
$K_1$	41
$O_1$	15
$P_1$	13

Tableau 2  
Marée de Rembang (Java)

Il est donc indispensable de schématiser autant que possible le phénomène pour en garder les caractéristiques essentielles susceptibles d'intéresser les navigateurs. Ces caractéristiques sont le nombre et la hauteur des pleines et basses mers et éventuellement les inégalités en heure et hauteur.

### 5.1 - Description de la marée au cours d'une journée

On suppose, pour la suite, que la marée se réduit à une superposition d'ondes diurnes et d'ondes semi-diurnes. Les vitesses angulaires de ces ondes s'écartent peu de respectivement 1 et 2 tours par jour lunaire moyen et on peut écrire (voir chapitre VIII, § 4.2) :

$$h(t) = \sum_i h_i \cos(\omega_i t - \beta_i) = R_1 \cos(\tau - \alpha_1) + R_2 \cos(2\tau - \alpha_2)$$

où les quantités  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont prises constantes au cours de la journée et égales à leurs valeurs moyennes sur cette journée. Ces quantités varient cependant de façon appréciable au cours de la lunaison : par exemple,  $R_2$  varie de  $h_{M2} + h_{S2}$  à  $h_{M2} - h_{S2}$  tandis que  $R_1$  varie entre  $h_{K1} + h_{O1}$  et  $h_{K1} - h_{O1}$ .

Soit  $r = \frac{R_1}{R_2}$  le rapport des amplitudes des termes diurne et semi-diurne,  
 $\theta = \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2}$  le déphasage du terme diurne par rapport au terme semi-diurne  
 et  $\gamma = \tau - \frac{\alpha_2}{2}$

d'où  $h = R_2 (r \cos(\gamma - \theta) + \cos 2\gamma)$

La forme de la courbe de marée ne dépend plus que des paramètres  $r$  et  $\theta$  ; elle est caractérisée par la fonction :

$$z = r \cos(\gamma - \theta) + \cos 2\gamma$$

où  $\gamma$  croît linéairement avec le temps à la vitesse de 1 tour/ jour lunaire moyen .

Les extremums de la courbe sont donnés par :

$$\frac{dz}{d\gamma} = 0$$

soit  $r \sin(\gamma - \theta) + 2 \sin 2\gamma = 0$

Introduisons les nouvelles variables :

$$\begin{cases} X = \cos \gamma \\ Y = \sin \gamma \\ \\ x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

qui constituent respectivement les coordonnées rectangulaires des points de coordonnées polaires  $(1, \gamma)$  et  $(r, \theta)$

Les extremums sont obtenus par résolution du système d'équations en X et Y :

$$(1) \begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Yx - Xy + 4 XY = 0 \end{cases}$$

Les solutions correspondantes  $\gamma$  sont les angles polaires des intersections du cercle (C) de rayon unité avec la courbe (H) image de la fonction homographique

$$Y = \frac{yX}{4X + x}$$

qui a pour asymptotes les droites d'équation  $X = -\frac{x}{4}$  et  $Y = \frac{y}{4}$  et dont l'une des branches passe par l'origine O ( $X = Y = 0$ ).

Soit M (X,Y) le point courant de (H). Quand X varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , la distance D entre O et M passe par un minimum sur chacune des deux branches de H, correspondant aux points O et P (Figure 3) et le nombre de solutions du système (I) dépend de la position de P par rapport au cercle (C) :

si P est à l'intérieur de (C), il y a quatre points d'intersection entre (C) et (H) correspondant à deux pleines mers et deux basses mers par jour (Figure 3) ;

si P est à l'extérieur de (C), il y a deux points d'intersection entre (C) et (H) correspondant à une pleine mer et une basse mer par jour (Figure 4) .

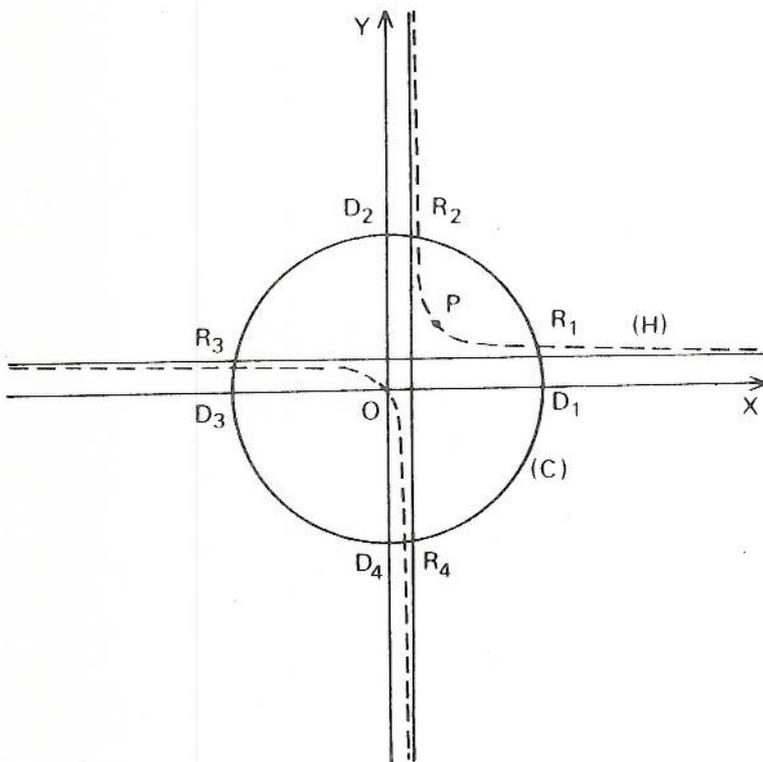


Figure 3 —  $r = 1$  ,  $\theta = 127^\circ$ .

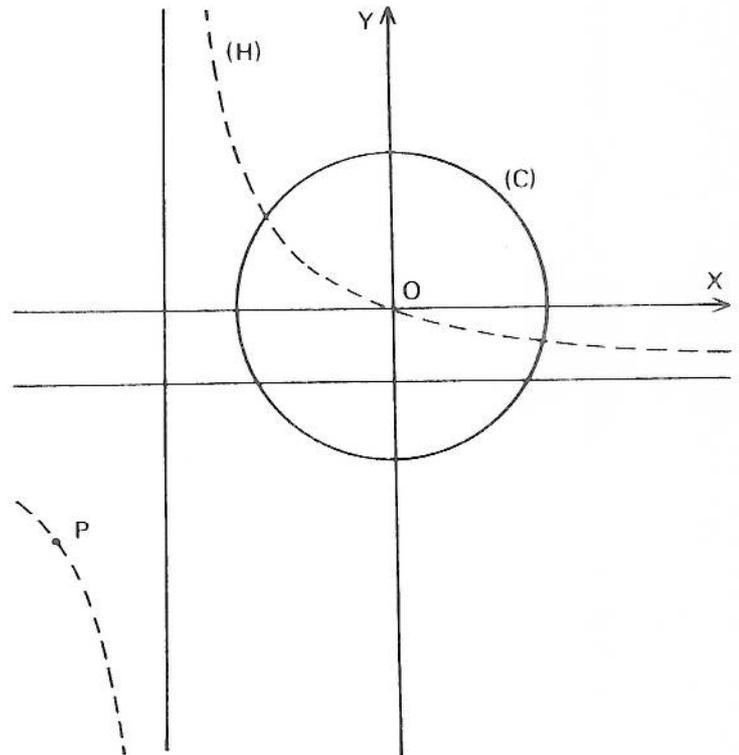


Figure 4 —  $r = 6.3$  ,  $\theta = -18^\circ$ .

La condition analytique associée peut être déterminée assez facilement .

$$D^2 = X^2 + Y^2 = X^2 + \frac{y^2 X^2}{(4X + x)^2}$$

$$2 D \frac{dD}{dX} = 2 X + \frac{2y^2 X}{(4X + x)^2} - \frac{8y^2 X^2}{(4X + x)^3}$$

Les minimums O et P correspondent respectivement à

$$X_0 = Y_0 = 0$$

$$\text{et } 1 + \frac{y^2}{(4X_P + x)^2} - \frac{4y^2 X_P}{(4X_P + x)^3} = 0$$

$$\text{soit } (4X_P + x)^3 + x y^2 = 0$$

$$\begin{cases} X_P = -\frac{1}{4} (x + x^{1/3} y^{2/3}) \\ Y_P = \frac{1}{4} (y + x^{2/3} y^{1/3}) \end{cases}$$

La distance OP est égale à

$$D_P = \sqrt{X_P^2 + Y_P^2}$$

$$\text{soit } D_P^2 = \frac{1}{16} (x^{2/3} + y^{2/3})^3$$

La limite entre les domaines représentatifs de la marée semi-diurne et de la marée diurne est donc la courbe d'équation :

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}$$

C'est une astroïde (A) de paramètre égal à 4 (Figure 5). Soit p (x, y) son point courant.

La distance r = Op peut être calculée de deux façons :

$$(x^{2/3} + y^{2/3})^3 = 16$$

$$\text{soit } r^2 + 3(x^4 y^{2/3}) + 3(x^2 y^4)^{1/3} = 16$$

$$r^2 + \text{termes positifs} = 16$$

d'où  $r^2 \leq 16$

$$x^2 = (4^{2/3} - y^{2/3})^3$$

soit  $r^2 = 16 - 3 \cdot 4^{2/3} (4^{2/3} - y^{2/3}) y^{2/3}$

Le maximum du produit  $y^{2/3} (4^{2/3} - y^{2/3})$  est atteint pour  $y^{2/3} = \frac{4^{2/3}}{2}$ , d'où :

$$r^2 \geq 4$$

En conclusion :

- si  $r \geq 4$  : il y a toujours 1 pleine mer et 1 basse mer par jour
- si  $r \leq 2$  : il y a toujours 2 pleines mers et 2 basses mers par jour
- si  $2 \leq r \leq 4$  : il y a 2 pleines mers et 2 basses mers par jour ou 1 pleine mer et 1 basse mer par jour, suivant la valeur de  $\theta$ .

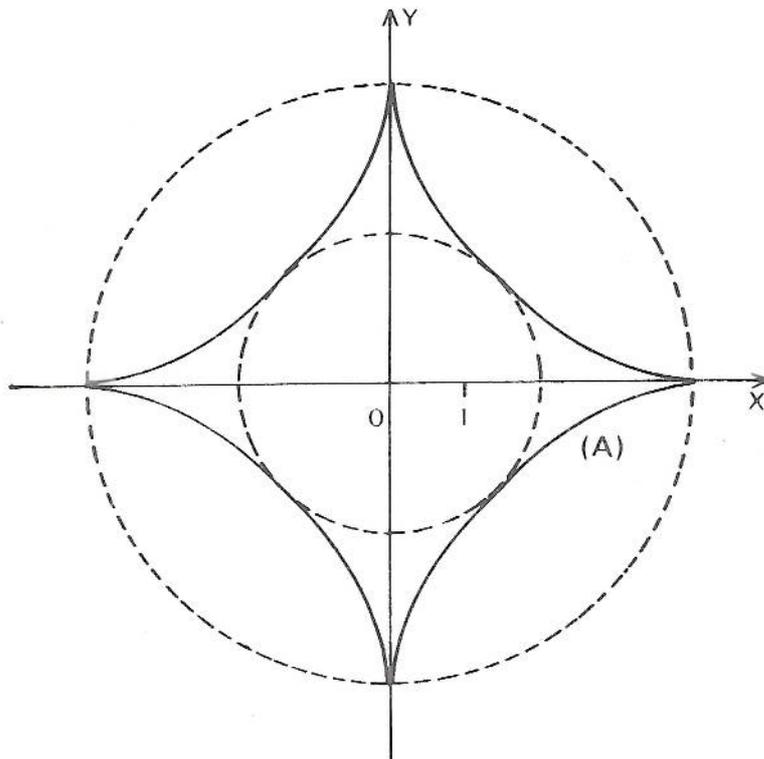


Figure 5

## 5.2 - Classification de la marée en quatre types

La détermination du nombre des pleines et basses mers par la méthode indiquée au paragraphe précédent suppose le calcul des paramètres  $r$  et  $\Theta$ . Pratiquement, on préfère utiliser un critère plus approché mais plus simple, fonction des amplitudes des ondes principales  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_1$  et  $O_1$ .

La classification adoptée en France a été proposée par Courtier en 1938. Elle comprend quatre types en fonction de la valeur du rapport  $R$  :

$$R = \frac{h_{K_1} + h_{O_1}}{h_{M_2} + h_{S_2}}$$

rapport de l'amplitude de la vive-eau diurne à l'amplitude de la vive-eau semi-diurne.

- 1er type :  $0 \leq R < 0.25$  : ports à marée semi-diurne régulière (2 PM et 2 BM par jour, de hauteurs à peu près égales)
- 2ème type :  $0.25 \leq R < 1.5$  : ports à marée semi-diurne à inégalité diurne (2 PM et 2 BM par jour, de hauteurs inégales)
- 3ème type :  $1.5 \leq R < 3$  : ports à marée mixte (tantôt 2 PM et 2 BM par jour, tantôt 1 PM et 1 BM par jour)
- 4ème type :  $3 \leq R$  : ports à marée diurne (1 PM et 1 BM par jour)

Cette classification est assez arbitraire car elle ne tient pas compte des situations des ondes. Dans d'autres pays, on ne considère souvent que trois types de marée en regroupant nos 2ème et 3ème types ou nos 3ème et 4èmes types

Pour justifier sa classification, Courtier considère une marée réduite à ses quatre ondes principales :  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_1$  et  $O_1$ .

$$h = h_{M_2} \cos(2\tau - \kappa_{M_2}) + h_{S_2} \cos(2\tau + 2s - 2h - \kappa_{S_2}) + h_{K_1} \cos(\tau + s - \frac{\pi}{2} - \kappa_{K_1}) + h_{O_1} \cos(\tau - s - \frac{\pi}{2} - \kappa_{O_1})$$

L'introduction des exponentielles complexes permet de calculer facilement les paramètres  $r$  et  $\Theta$  correspondants. La hauteur des termes semi-diurnes est :

$$h_2 = h_{M_2} \cdot \text{partie réelle de } \left( e^{i(2\tau - \kappa_{M_2})} \left( 1 + \frac{h_{S_2}}{h_{M_2}} e^{i(2s - 2h - \kappa_{S_2} + \kappa_{M_2})} \right) \right)$$

$$\text{soit } h_2 = r_2 h_{M_2} \cos(2\tau + u_2 - \kappa_{M_2})$$

$$\text{avec } r_2 = \left( 1 + 2 \frac{h_{S_2}}{h_{M_2}} \cos(2s - 2h - \kappa_{S_2} + \kappa_{M_2}) + \frac{h_{S_2}^2}{h_{M_2}^2} \right)^{1/2}$$

$$u_2 = \text{Arc tg } \frac{\sin(2s - 2h - \kappa_{S_2} + \kappa_{M_2})}{\frac{h_{S_2}}{h_{M_2}} + \cos(2s - 2h - \kappa_{S_2} + \kappa_{M_2})}$$

Ces deux quantités varient peu au cours de la journée et peuvent être supposées constantes .

On obtient de la même façon la hauteur des termes diurnes :

$$h_1 = r_1 h_{K_1} \cos(\tau + s + \frac{\pi}{2} - H_{K_1} + u_1)$$

avec  $r_1 = \left( 1 - 2 \frac{h_{O_1}}{h_{K_1}} \cos(2s - H_{K_1} + H_{O_1}) + \frac{h_{O_1}^2}{h_{K_1}^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

$$u_1 = \text{Arc tg} \frac{\sin(2s - H_{K_1} + H_{O_1})}{h_{K_1}/h_{O_1} - \cos(2s - H_{K_1} + H_{O_1})}$$

D'où  $r = \frac{r_1 h_{K_1}}{r_2 h_{M_2}}$

$$\theta = H_{K_1} - \frac{\pi}{2} - s - u_1 - \frac{H_{M_2}}{2} + \frac{u_2}{2}$$

Remarquons que :

$$\left| 1 - h_{S_2}/h_{M_2} \right| \leq r_2 \leq 1 + h_{S_2}/h_{M_2}$$

Si on remplace  $h_{S_2}$  par sa valeur la plus courante :

$$h_{S_2} = \frac{1}{3} h_{M_2}$$

on obtient

$$0,7 \leq r_2 \leq 1,3$$

soit  $r_2 \approx 1$

et  $r_2 h_{M_2} \approx \frac{3}{4} (h_{M_2} + h_{S_2})$

On montre facilement que  $\text{tg} u_2$  est maximum pour

$$\cos(2s - 2h - H_{S_2} + H_{M_2}) = - \frac{h_{S_2}}{h_{M_2}}$$

d'où  $-20^\circ \leq u_2 \leq 20^\circ$

D'autre part, les ondes  $K_1$  et  $O_1$  ont le plus souvent des amplitudes très voisines, d'où :

$$r_1 \approx 2 \left| \sin\left(s - \frac{H_{K_1} - H_{O_1}}{2}\right) \right|$$

$$u_1 \approx \frac{\pi}{2} - s + \frac{H_{K_1} - H_{O_1}}{2} + k\pi \quad (k \text{ entier})$$

Ces deux quantités varient peu au cours de la journée et peuvent être supposées constantes .

On obtient de la même façon la hauteur des termes diurnes :

$$h_1 = f_1 h_{K_1} \cos\left(\tau + s + \frac{\pi}{2} - M_{K_1} + u_1\right)$$

avec  $f_1 = \left(1 - 2 \frac{h_{O_1}}{h_{K_1}} \cos(2s - M_{K_1} + M_{O_1}) + \frac{h_{O_1}^2}{h_{K_1}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$u_1 = \text{Arc tg} \frac{\sin(2s - M_{K_1} + M_{O_1})}{h_{K_1}/h_{O_1} - \cos(2s - M_{K_1} + M_{O_1})}$$

D'où

$$r = \frac{f_1 h_{K_1}}{f_2 h_{M_2}}$$

$$\theta = M_{K_1} - \frac{\pi}{2} - s - u_1 - \frac{M_{M_2}}{2} + \frac{u_2}{2}$$

Remarquons que :

$$\left|1 - h_{S_2}/h_{M_2}\right| \leq f_2 \leq 1 + h_{S_2}/h_{M_2}$$

Si on remplace  $h_{S_2}$  par sa valeur la plus courante :

$$h_{S_2} = \frac{1}{3} h_{M_2}$$

on obtient

$$0,7 \leq f_2 \leq 1,3$$

soit  $f_2 \approx 1$

et  $f_2 h_{M_2} \approx \frac{3}{4} (h_{M_2} + h_{S_2})$

On montre facilement que  $\tan u_2$  est maximum pour

$$\cos(2s - 2h - M_{S_2} + M_{M_2}) = - \frac{h_{S_2}}{h_{M_2}}$$

d'où  $-20^\circ \leq u_2 \leq 20^\circ$

D'autre part, les ondes  $K_1$  et  $O_1$  ont le plus souvent des amplitudes très voisines, d'où :

$$f_1 \approx 2 \left| \sin\left(s - \frac{M_{K_1} - M_{O_1}}{2}\right) \right|$$

$$u_1 \approx \frac{\pi}{2} - s + \frac{M_{K_1} - M_{O_1}}{2} + k\pi \quad (k \text{ entier})$$

Ces deux quantités varient peu au cours de la journée et peuvent être supposées constantes .

On obtient de la même façon la hauteur des termes diurnes :

$$h_1 = r_1 h_{K_1} \cos\left(s + \frac{\pi}{2} - H_{K_1} + u_1\right)$$

avec  $r_1 = \left(1 - 2 \frac{h_{O_1}}{h_{K_1}} \cos(2s - H_{K_1} + H_{O_1}) + \frac{h_{O_1}^2}{h_{K_1}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$u_1 = \text{Arc tg} \frac{\sin(2s - H_{K_1} + H_{O_1})}{h_{K_1}/h_{O_1} - \cos(2s - H_{K_1} + H_{O_1})}$$

D'où

$$r = \frac{r_1 h_{K_1}}{r_2 h_{M_2}}$$

$$\theta = H_{K_1} - \frac{\pi}{2} - s - u_1 - \frac{H_{M_2}}{2} + \frac{u_2}{2}$$

Remarquons que :

$$\left|1 - h_{S_2}/h_{M_2}\right| \leq r_2 \leq 1 + h_{S_2}/h_{M_2}$$

Si on remplace  $h_{S_2}$  par sa valeur la plus courante :

$$h_{S_2} = \frac{1}{3} h_{M_2}$$

on obtient

$$0,7 \leq r_2 \leq 1,3$$

soit  $r_2 \approx 1$

et  $r_2 h_{M_2} \approx \frac{3}{4} (h_{M_2} + h_{S_2})$

On montre facilement que  $\tan u_2$  est maximum pour

$$\cos(2s - 2h - H_{S_2} + H_{M_2}) = - \frac{h_{S_2}}{h_{M_2}}$$

d'où  $-20^\circ \leq u_2 \leq 20^\circ$

D'autre part, les ondes  $K_1$  et  $O_1$  ont le plus souvent des amplitudes très voisines, d'où :

$$r_1 \approx 2 \left| \sin\left(s - \frac{H_{K_1} - H_{O_1}}{2}\right) \right|$$

$$u_1 \approx \frac{\pi}{2} - s + \frac{H_{K_1} - H_{O_1}}{2} + k\pi \quad (k \text{ entier})$$

$$\text{et } f_1 h_{K_1} \approx (h_{K_1} + h_{O_1}) \left| \sin\left(s - \frac{K_{K_1} - K_{O_1}}{2}\right) \right|$$

Cette expression est d'ailleurs exacte, quelles que soient les valeurs  $h_{K_1}$  et  $h_{O_1}$ , lors des vives-eaux du groupe diurne ( $K_1, O_1$ ) (voir § 3.2.)

En définitive, avec les deux hypothèses supplémentaires :

$$\begin{cases} h_{K_1} \approx h_{O_1} \\ h_{S_2} \approx \frac{1}{3} h_{M_2} \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} r \approx \frac{4}{3} R \left| \sin\left(s - \frac{K_{K_1} - K_{O_1}}{2}\right) \right| \\ \theta \approx \frac{K_{K_1} - K_{O_1}}{2} \end{cases}$$

Soit  $r_0$  le rayon vecteur du point de l'astroïde (A) d'angle polaire  $\theta$ .

Le type de marée est obtenu par comparaison de  $r$  et de  $r_0$ . La quantité  $S = s - \frac{K_{K_1} - K_{O_1}}{2}$  varie linéairement avec le temps au cours d'une lunaison.

Soit  $S_0$  la valeur de  $S$  définie par :

$$S_0 = \begin{cases} \text{Arc sin } \frac{3r_0}{4R} & \text{si } 3r_0 < 4R \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } 3r_0 \geq 4R \end{cases}$$

$$\text{avec } r_0 = \frac{4}{(\cos^{2/3} \theta + \sin^{2/3} \theta)^{3/2}}$$

Le taux d'apparition d'une marée de type diurne au cours de la lunaison est :

$$P_1 = \frac{\frac{\pi}{2} - S_0}{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2S_0}{\pi}$$

Le taux  $P_1$  dépend de  $R$  et  $\theta$  ; pour  $\theta$  fixé, il croît avec  $R$ . Mais la quantité  $r_0$  est toujours supérieure à 2, ce qui permet de distinguer deux cas :

1)  $R \leq 1,5$

Alors  $P_1 = 0$  et la marée est semi-diurne, quelle que soit la valeur de  $\theta$ .

Dans le cas où  $R < 0,25$ , alors  $r < 0,33$  et l'écart en temps entre les extremums de la marée totale (représentés par les points  $R_1$  à  $R_4$  sur la figure 3) et les extremums de la marée semi-diurne (représentés par les points  $D_1$  à  $D_4$  sur la figure 3) est toujours inférieur à :

$$\Delta t = \frac{1}{T} \text{Arc tg } \frac{r}{4} ,$$

la courbe (H) étant très proche de ses asymptotes, soit :

$$\Delta t \simeq 20 \text{ mn}$$

et la marée totale diffère peu d'une marée semi-diurne régulière.

La classification des deux premiers types est ainsi justifiée.

## 2) $R > 1,5$

Le taux  $P_1$  dépend simultanément des valeurs  $R$  et  $\theta$ . Pour  $R$  fixé, il est minimum lorsque  $r_0$  est maximum, c'est-à-dire pour :

$$\theta = \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{soit } P_{1\text{min}} = 1 - \frac{2}{\pi} \text{Arc sin } \frac{3}{R}$$

Il est maximum pour :

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{soit } P_{1\text{max}} = 1 - \frac{2}{\pi} \text{Arc sin } \frac{1,5}{R}$$

On a représenté  $P_1$  en fonction de  $\theta$  sur la figure 6, pour différentes valeurs de  $R$ .

Les limites adoptées par Courtier correspondent à :

$$R > 1,5 : P_{1\text{max}} > 0$$

$$R \geq 3 : P_{1\text{min}} \geq 0 ; P_{1\text{moyen}} \geq 0,57 ; P_{1\text{max}} \geq 0,67$$

Le caractère approché de sa classification, qui ne tient pas compte des situations des ondes est ainsi mis en évidence.

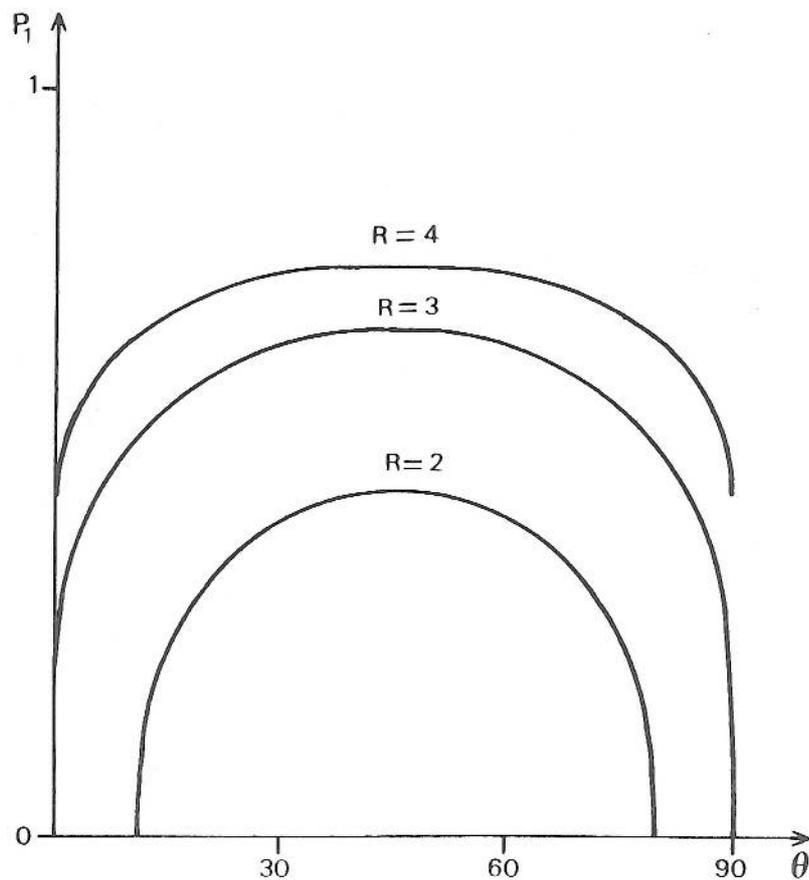


Figure 6

Le taux  $P_1$  reste toujours inférieur à 1 mais lorsque  $R$  est important, l'apparition de la marée de type semi-diurne correspond aux valeurs de  $s$  proches de  $\frac{1}{2}(\mathbf{H}_{K_1} - \mathbf{H}_{O_1}) + k\pi$ ,

c'est-à-dire aux mortes-eaux de la marée diurne, et la marée est alors faible.

### 5.3 - Caractéristiques de la marée d'un port

La hauteur d'eau de la marée réduite aux quatre ondes principales  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_1$ ,  $O_1$  est, avec les hypothèses du paragraphe précédent :

$$h = f_2 h_{M_2} \cos(2\tau + u_2 - \mathbf{H}_{M_2}) + (h_{K_1} + h_{O_1}) |\sin S| \cos\left(\tau + \frac{u_2 - \mathbf{H}_{M_2}}{2} - \Theta\right)$$

Cette expression permet de préciser les caractéristiques principales de la marée pour chacun des quatre types en fonction des propriétés des quatre ondes principales (voir § 2 et 3).

1) - Marée semi-diurne :

$$\frac{h_{K_1} + h_{O_1}}{h_{M_2} + h_{S_2}} < 0,25$$

La marée se réduit essentiellement à la contribution de  $M_2$  et de  $S_2$  :

$$h = h_{M_2} \cos(2\tau - M_{M_2}) + h_{S_2} \cos(2\tau - M_{S_2})$$

et ses caractéristiques ont été données au § 2.2. Au cours d'une lunaison, le marnage est maximum en vive-eau (au voisinage des syzygies) et minimum en morte-eau (au voisinage des quadratures). Les hauteurs caractéristiques correspondantes sont données dans le tableau ci-dessous :

Hauteurs dans les marées moyennes

:	Pleines	mers	:	Niveau	:	Basses	mers	:
:	VE	ME	:	moyen	:	ME	VE	:
:	$z_0 + h_{M_2} + h_{S_2}$	$z_0 +  h_{M_2} - h_{S_2} $	:	$z_0$	:	$z_0 -  h_{M_2} - h_{S_2} $	$z_0 - h_{M_2} - h_{S_2}$	:

2) - Marée semi-diurne à inégalité diurne

$$0,25 \leq \frac{h_{K_1} + h_{O_1}}{h_{M_2} + h_{S_2}} < 1,5$$

La contribution des ondes diurnes n'est plus négligeable mais il y a toujours deux pleines mers et deux basses mers par jour.

Pour le calcul des hauteurs de pleines et basses mers, on peut considérer que les instants correspondants diffèrent peu de ceux des pleines et basses mers de  $M_2$ .

$$\tau \approx \frac{M_{M_2} - \pi}{2} + k \frac{\pi}{2} \quad (k = 0 \text{ ou } 2 \text{ en pleine mer, } 1 \text{ ou } 3 \text{ en basse mer})$$

La contribution des termes diurnes aux pleines et basses mers est successivement :

$$\begin{aligned}
 k = 0 \text{ (1ère PM)} : h_1 &= (h_{K_1} + h_{O_1}) \sin \left( \theta - \frac{K_{K_1} - K_{O_1}}{2} \right) \cos \theta \\
 k = 1 \text{ (1ère BM)} : h_1 &= (h_{K_1} + h_{O_1}) \sin \left( \theta - \frac{K_{K_1} - K_{O_1}}{2} \right) \sin \theta \\
 k = 2 \text{ (2ème PM)} : h_1 &= -(h_{K_1} + h_{O_1}) \sin \left( \theta - \frac{K_{K_1} - K_{O_1}}{2} \right) \cos \theta \\
 k = 3 \text{ (2ème BM)} : h_1 &= -(h_{K_1} + h_{O_1}) \sin \left( \theta - \frac{K_{K_1} - K_{O_1}}{2} \right) \sin \theta
 \end{aligned}$$

Son signe dépend de la valeur de  $\theta$  qui fixe donc la séquence de la marée c'est-à-dire l'ordre de succession des pleines et basses mers inférieures et supérieures (Figure 7) .

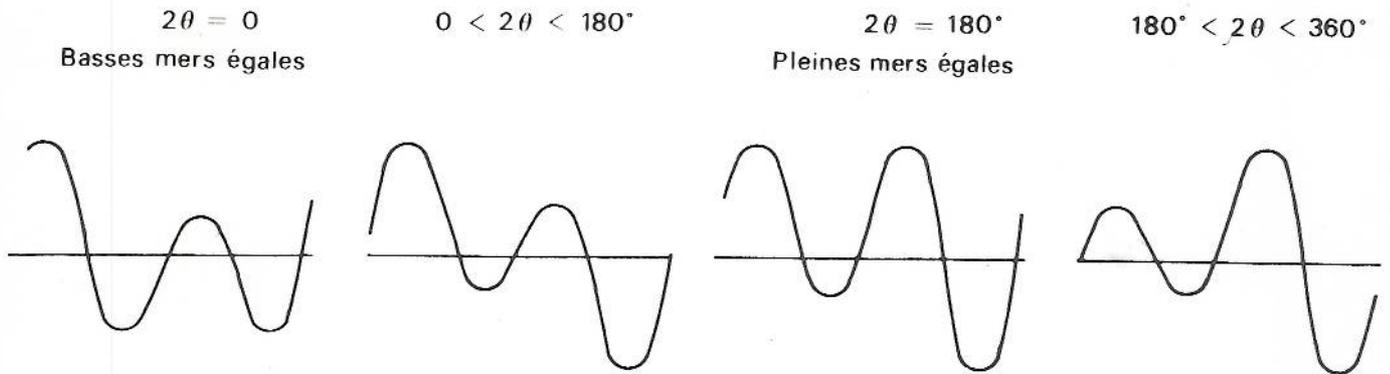


Figure 7

Les hauteurs moyennes des pleines et basses mers au cours de la lunaison sont :

$$\text{PM supérieure} : h \approx Fh_2 + S |\cos \theta| (h_{K_1} + h_{O_1})$$

$$\text{PM inférieure} : h \approx Fh_2 - S |\cos \theta| (h_{K_1} + h_{O_1})$$

$$\text{BM supérieure} : h \approx -Fh_2 + S |\sin \theta| (h_{K_1} + h_{O_1})$$

$$\text{BM inférieure} : h \approx -Fh_2 - S |\sin \theta| (h_{K_1} + h_{O_1})$$

où F et S sont les valeurs moyennes de  $f_2$  et  $\left| \sin \left( s - \frac{K_{K_1} - K_{O_1}}{2} \right) \right|$  sur la lunaison

$$\text{soit : } F \approx 1$$

$$S = \frac{1}{T} \int_0^T \left| \sin \frac{2\pi t}{T} \right| dt = 0,64$$

d'où le tableau des hauteurs caractéristiques :

Hauteurs dans les marées moyennes

Pleines	mers	Niveau moyen	Basses	mers
Sup.	Inf.		Sup.	Inf.
$Z_0 + h_{M_2} + D_c$	$Z_0 + h_{M_2} - D_c$	$Z_0$	$Z_0 - h_{M_2} + D_s$	$Z_0 - h_{M_2} - D_s$

$$\text{avec } D_C = 0,64 (h_{K_1} + h_{O_1}) \cos \frac{\kappa_{K_1} + \kappa_{O_1} - \kappa_{M_2}}{2}$$

$$D_S = 0,64 (h_{K_1} + h_{O_1}) \sin \frac{\kappa_{K_1} + \kappa_{O_1} - \kappa_{M_2}}{2}$$

### 3) - Marée mixte

$$1,5 \leq \frac{h_{K_1} + h_{O_1}}{h_{M_2} + h_{S_2}} < 3$$

On observe au cours d'une lunaison tantôt une seule pleine mer et une seule basse mer par jour (au voisinage des tropiques lunaires) tantôt deux pleines mers et deux basses mers par jour (lorsque la Lune est au voisinage de l'équateur). La détermination des pleines et basses mers peut être faite par la méthode indiquée au § 5.1. En particulier, la situation des différentes ondes a une influence non négligeable sur les caractéristiques de la marée.

Les seules hauteurs caractéristiques ayant une définition simple sont celles des vives-eaux de la marée diurne, pour lesquelles on peut négliger les ondes semi-diurnes.

#### Hauteurs dans les marées moyennes

: Pleine mer	: Niveau	: Basse mer	::
: VE diurne	: moyen	: VE diurne	:
:	:	:	:
: $Z_0 + h_{K_1} + h_{O_1}$	: $Z_0$	: $Z_0 - (h_{K_1} + h_{O_1})$	:
:	:	:	:

### 4) - Marée diurne

$$\frac{h_{K_1} + h_{O_1}}{h_{M_2} + h_{S_2}} \geq 3$$

Il y a une seule pleine mer et une seule basse mer, sauf au voisinage du passage de la Lune à l'équateur où l'onde semi-diurne, bien que faible, devient prépondérante; mais le marnage est alors très petit.

Les hauteurs caractéristiques adoptées sont celles des vives-eaux (coïncidence des phases de  $K_1$  et  $O_1$ )

Hauteurs dans les marées moyennes

: Pleine mer :	: Niveau :	: Basse mer :
: VE :	: moyen :	: VE :
: $Z_0 + h_{K_1} + h_{O_1}$ :	: $Z_0$ :	: $Z_0 - (h_{K_1} + h_{O_1})$ :
:	:	:

Les tableaux indiqués pour chaque type de marée constituent les renseignements portés sur les cartes marines.

Analyse harmonique des observations de marée

1 - Généralités

La formule harmonique, déduite du développement du potentiel générateur, exprime la hauteur d'eau due à la marée sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{hm}(t) &= \sum_{\ell} H_{\ell} \cos (v_{o\ell} + q_{\ell} t - g_{\ell}) \\ \text{ou } \text{hm}(t) &= \sum_{\ell} H_{\ell} \cos (q_{\ell} t - \alpha_{\ell}) \end{aligned}$$

avec :

- $q_{\ell}$  : vitesse angulaire de l'onde  $\ell$
- $v_{o\ell}$  : argument astronomique à l'instant  $t_{UT} = 0$
- $g_{\ell}$  : situation relative de l'onde  $\ell$
- $H_{\ell}$  : amplitude de l'onde  $\ell$
- $\alpha_{\ell} : g_{\ell} - v_{o\ell}$

L'introduction d'un terme à vitesse angulaire nulle (le niveau moyen) permet de tenir compte du niveau de référence adopté pour mesurer les hauteurs.

Les vitesses angulaires  $q_{\ell}$  sont connues : ce sont les vitesses angulaires des termes correspondants du développement du potentiel ou des combinaisons linéaires de ces vitesses pour les termes d'interaction qui apparaissent en eau peu profonde. Par contre, les constantes  $H_{\ell}$  et  $g_{\ell}$  ne sont pas fournies par la théorie : leur détermination à partir de l'observation de la hauteur d'eau est le but de l'analyse harmonique.

Les difficultés rencontrées pour atteindre cet objectif proviennent de trois contraintes : l'existence d'un "bruit" qui se superpose à la marée pour constituer la hauteur observée, la durée finie d'observations qui ne permet pas la séparation des ondes de vitesses angulaires trop proches et enfin la nécessité d'opérer sur des séries de valeurs discrètes de hauteur qui réduit l'intervalle de variation des vitesses angulaires accessible.

1.1 - Le bruit dans les analyses de marée

La hauteur réelle observée est :

$$h(t) = \text{hm}(t) + b(t)$$

ou  $b(t)$  représente le bruit, composé des variations accidentelle du niveau de la mer, dues essentiellement aux influences météorologiques. Si  $h$  est la hauteur enregistrée,  $b$  comprend en outre les erreurs instrumentales et de dépouillement des marégrammes.

Les fréquences des ondes qui composent la marée étant connues, la transformation de Fourier (voir appendice 1) est un outil théorique commode. On appelle spectre d'amplitude de la marée la transformée de Fourier de  $h$  :

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-2i\pi\omega t} dt = \hat{\text{hm}}(\omega) + \hat{b}(\omega)$$

$$\text{soit } \hat{h}(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{\ell} \left\{ H_{\ell} e^{-i\alpha_{\ell}} \delta_{(\nu - \nu_{\ell})} + H_{\ell} e^{i\alpha_{\ell}} \delta_{(\nu + \nu_{\ell})} \right\} + \hat{b}(\nu)$$

où  $\nu_{\ell} = \frac{q_{\ell}}{2\pi}$

et  $\delta(\nu - \nu_{\ell})$  est la distribution de Dirac centrée en  $\nu_{\ell}$ .

Le spectre  $\hat{h}$  est donc formé de la superposition de raies centrées aux fréquences  $\pm \nu_{\ell}$  et du spectre continu  $\hat{b}(\nu)$ . Il n'est pas possible de séparer les contributions  $\hat{h}m(\nu_{\ell})$  et  $\hat{b}(\nu_{\ell})$  sans hypothèse supplémentaire sur  $b$ .

Il existe, théoriquement, une infinité de termes d'interaction dans l'expression de  $hm$ . Mais, on voit que l'existence du bruit oblige à se limiter à un nombre restreint de composantes dont l'amplitude est supérieure à l'ordre de grandeur du bruit. Si aucun effort particulier n'est fait pour réduire le bruit, une onde dont l'amplitude est inférieure au  $cm$  est, en général, mal déterminée. En pratique, le nombre de composantes à calculer effectivement ne dépasse la cinquantaine que dans les zones d'estuaire où les ondes de petits fonds peuvent être très nombreuses.

### 1.2 - Critère de séparation

La durée d'observation  $T$  est toujours finie et inférieure à la période de  $hm$ . On ne peut donc bien séparer deux ondes  $\ell$  et  $k$  que si leurs vitesses angulaires vérifient le critère de Rayleigh :

$$T |q_{\ell} - q_k| \geq 2\pi$$

Dans le cas contraire, on dit que les ondes  $\ell$  et  $k$  sont mal séparées. La durée d'observation doit être d'autant plus grande que les ondes à séparer sont plus proches (tableau 1).

$ \Delta q $	Durée d'observation nécessaire à la séparation
$\dot{\tau}$	1 jour
$\dot{s}$	27 jours
$\dot{s} - h$	29 jours
$\dot{h}$	365 jours

Lorsque la durée d'observation est imposée on choisira les ondes vérifiant le critère de séparation dans l'ordre décroissant des amplitudes supposées proportionnelles aux amplitudes connues des ondes dans un port voisin ou, à défaut, aux coefficients astronomiques correspondants. La prise en compte d'ondes mal séparées est possible moyennant des hypothèses supplémentaires permettant de relier leurs constantes harmoniques.

### 1.3 - Corrections nodales

Les périodes de  $p$ ,  $N'$  et  $p_1$  sont voisines, respectivement, de 9, 19 et 20 940 années. Pour les durées d'observation courantes, de l'ordre de l'année, le critère de séparation n'est pas vérifié pour les termes dont les arguments astronomiques diffèrent d'une combinaison linéaire de  $p$ ,  $N'$  et  $p_1$ .

Considérons les ondes  $k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) de nombres arguments ( $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ) où  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont donnés. Prenons pour onde 1 celle qui a l'amplitude (connue ou estimée) maximum. Les ondes  $k$ ,  $k = 2, \dots, n$  sont dites ondes perturbatrices de l'onde 1.

Lorsque la durée d'observation  $T$  est telle que :

$$(1) \quad T \left| q_1 - q_k \right| \ll 2 \pi, \quad k = 2 \text{ à } n$$

La contribution des ondes perturbatrices peut être interprétée comme une modulation de la phase et de l'amplitude de l'onde 1. En effet :

$$\text{si } H(t) = \sum_{k=1}^n H_k e^{i(q_k t - \alpha_k)}$$

on peut écrire :

$$H(t) = H_1 e^{i(q_1 t - \alpha_1)} \left\{ 1 + \sum_{k=2}^n \frac{H_k}{H_1} e^{i\{(q_k - q_1)t + \alpha_1 - \alpha_k\}} \right\}$$

On pose

$$f_1 e^{i u_1} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{H_k}{H_1} e^{i\{(q_k - q_1)t + \alpha_1 - \alpha_k\}}$$

avec  $f_1$  réel positif.

Compte tenu de (1),  $f_1$  et  $u_1$  sont des quantités lentement variables avec le temps que l'on peut supposer constantes et égales à leurs valeurs moyennes sur la période d'observation  $T$

$$f_1 e^{i u_1} \approx 1 + \sum_{k=2}^n \left\{ \frac{H_k}{H_1} e^{i(\alpha_1 - \alpha_k)} \left( \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(q_k - q_1)t} dt \right) \right\}$$

$$(2) \quad f_1 e^{i u_1} \approx 1 + \sum_{k=2}^n \left\{ \frac{\sin\left(\frac{q_k - q_1}{2} T\right)}{\frac{q_k - q_1}{2} T} \frac{H_k}{H_1} e^{i\left(\alpha_1 - \alpha_k + \frac{q_k - q_1}{2} T\right)} \right\}$$

$f_1$  et  $u_1$  sont appelées corrections nodales de l'onde 1 :

$$\sum_{k=1}^n H_k \cos(q_k t - \alpha_k) \approx f_1 H_1 \cos(q_1 t - \alpha_1 + u_1)$$

Pour calculer effectivement  $f_1$  et  $u_1$  à partir de l'expression (2) il faut faire des hypothèses sur les rapports  $\frac{H_k}{H_1}$  et sur les déphasages  $\alpha_k - \alpha_1$ .

Les hypothèses habituellement adoptées sont :

$$g_k = g_1$$

soit  $\alpha_1 - \alpha_k = V_{ok} - V_{o1}$

et  $\frac{H_k}{H_1} = \frac{G_k}{G_1} =$  rapport des coefficients astronomiques.

Les corrections nodales ne sont alors plus fonction du lieu : elles dépendent uniquement des valeurs des variables  $p$ ,  $N'$  et  $p_1$ .

Dans le cas des ondes d'interaction on procède de la façon suivante :

Soit une onde d'interaction  $C$  résultant de la combinaison de  $n$  ondes principales  $B_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

$C$  est représentée sous forme symbolique par :

$$C = \sum_{k=1}^n \beta_k B_k$$

où les  $\beta_k$  sont des entiers.

( $\beta_k$  est le coefficient multiplicateur de la vitesse angulaire de  $B_k$  dans la combinaison donnant la vitesse angulaire de  $C$ ).

Soit  $b_{k\ell}$  une onde perturbatrice de  $B_k$ . L'onde perturbatrice correspondante de  $C$  est :

$$c_{k\ell} = \beta_k b_{k\ell} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \beta_m B_m$$

On attribue à  $C$  le coefficient  $\Gamma$  et à  $c_{k\ell}$  le coefficient :

$$\frac{G'_{k\ell}}{G_k} |\beta_k|$$

où  $G_k$  est le coefficient astronomique de  $B_k$  et  $G'_{k\ell}$  celui de  $b_{k\ell}$ .

On néglige les ondes d'interaction formées avec plus d'une onde perturbatrice.

Lorsque la condition (1) n'est plus vérifiée mais que  $T \left| q_1 - q_k \right|$  reste inférieur à  $2\pi$  on considère séparément des tronçons de durée  $T_n$  pour lesquels on peut supposer que  $f$  et  $u$  restent constants. Dans la suite on posera :

$$A_\ell = f_\ell H_\ell$$

$$\alpha_\ell = g_\ell - v_{o\ell} - u_\ell$$

#### 1.4- Echantillonnage des observations

L'analyse de  $h(t)$  ne peut être pratiquement effectuée qu'à partir d'une série de valeurs discrètes. Pour éviter le phénomène d'aliasing, le pas d'échantillonnage  $\Delta$  doit être choisi tel que :

$$\hat{h}(p) = 0 \text{ pour } |p| > \frac{1}{2\Delta}$$

La fréquence de coupure  $v_\bullet$  telle que

$$\hat{h}(p) = 0 \text{ pour } |p| > v_\bullet$$

dépend des caractéristiques de l'appareil d'enregistrement. On devra choisir :

$$\Delta < \frac{1}{2 v_\bullet}$$

sinon, les constantes calculées pour les ondes de fréquence comprise entre  $\left( \frac{1}{\Delta} - v_\bullet \right)$  et  $\frac{1}{2\Delta}$  seront mal déterminées (voir appendice 1)

Réciproquement, lorsque  $\Delta$  est choisi, on ne peut plus rechercher dans  $h(t)$  les ondes de fréquence supérieure à  $\frac{1}{2\Delta}$ . Ainsi, la fréquence de coupure correspondant au pas d'échantillonnage usuel d'une heure est 0,5 cycle/heure. Pour la recherche de groupes d'ondes d'ordre supérieur au 12ème diurne, il faudra choisir un pas d'échantillonnage plus petit.

.../...

Lorsque les fréquences recherchées vérifient :

$$|v| \leq v_0 < \frac{1}{2\Delta}$$

on aura intérêt à effectuer un filtrage numérique préalable des observations pour éliminer les fréquences comprises entre  $v_0$  et  $\frac{1}{2\Delta}$ .

La série filtrée sera échantillonnée avec un pas  $\frac{1}{2v_0}$ . Cette technique est utilisée dans la méthode des hauteurs réduites (voir § 4.) et pour l'étude du niveau moyen (voir chapitre XIII).

### 1.5 - Principe de l'analyse harmonique

Plusieurs techniques ont été mises au point, depuis 1867, pour déterminer les constantes  $H_\ell$  et  $g_\ell$  à partir de l'observation  $h$ . Elles consistent pratiquement toutes à isoler la contribution de l'onde  $\ell$  à l'aide d'un filtrage approprié des observations.

Supposons qu'il existe une fonction  $F_\ell$  telle que :

$$\begin{aligned} \widehat{F}_\ell(v) &= 0 \text{ pour } v \neq \pm v_\ell \\ \widehat{F}_\ell(v_\ell) &= \overline{F_\ell(-v_\ell)} = \left| \widehat{F}_\ell(v_\ell) \right| e^{i\epsilon_\ell} \end{aligned}$$

alors (voir appendice 1)

$$(F_\ell \otimes h)(t) = \left| \widehat{F}_\ell(v_\ell) \right| A_\ell \cos(q_\ell t - \alpha_\ell + \epsilon_\ell) + (F_\ell \otimes b)(t)$$

où le produit de convolution est représenté par  $\otimes$ .

Si  $b(\pm v_\ell)$  est négligeable devant  $A_\ell$  alors :

$$(F_\ell \otimes h)(t) \approx \left| \widehat{F}_\ell(v_\ell) \right| A_\ell \cos(q_\ell t - \alpha_\ell + \epsilon_\ell)$$

et le but recherché est atteint.  $\widehat{F}_\ell(v_\ell)$  étant connu.

$\widehat{F}_\ell$  est un filtre idéal qui, dans la pratique, ne peut être que plus ou moins bien approché. Cela se traduit par l'existence de résidus des ondes  $k \neq \ell$  dans l'expression de  $(F_\ell \otimes h)$ , caractérisés par la valeur de  $\left| \widehat{F}_\ell(v_k) \right|$ . Le module de  $\widehat{F}_\ell(v_k)$  est appelé coefficient de résidu de l'onde  $k$ .

## 2 - Méthodes d'élimination.

### 2.1 - Principe

Les premières méthodes d'analyse ont été mises au point pour le calcul manuel.

Le filtrage destiné à amplifier une onde déterminée tout en éliminant plus ou moins les autres ondes et le bruit est réalisé à l'aide de combinaisons linéaires simples de hauteurs (c'est-à-dire à coefficients entiers) .

Parmi les nombreuses méthodes de ce type, certaines ont été adaptées au calcul automatique et sont encore utilisées de nos jours : la méthode de Doodson est ainsi toujours en vigueur dans les pays de l'école anglaise. Mais leur manque de souplesse ne permet pas toujours d'utiliser pleinement les possibilités des ordinateurs, en particulier pour le traitement des observations lacunaires.

$$\text{Soit } s(t) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell} h(t + \ell \Delta)$$

où  $a_{\ell}$  sont des nombres entiers et  $\Delta$  un intervalle de temps à déterminer.

On peut écrire :

$$s(t) = \left\{ h \otimes \left( \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell} \delta(t + \ell \Delta) \right) \right\} (t) = \left\{ h \otimes F \right\} (t)$$

La fonction de transfert du filtre ainsi réalisé est :

$$(3) \quad \hat{F}(v) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell} e^{+2i\pi v \ell \Delta} = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell} \left( e^{iq\Delta} \right)^{\ell}$$

avec  $q = 2\pi v$

$$\hat{F}(v_k) = J_k e^{+i\epsilon_k} \quad \text{avec } J_k \text{ réel positif}$$

$$\text{d'où } s(t) = \sum_k J_k A_k \cos(q_k t - \alpha_k + \epsilon_k) + \left\{ b \otimes F \right\} (t)$$

L'élimination de l'onde  $k$  revient à résoudre un problème d'algèbre : trouver un polynôme à coefficients entiers s'annulant lorsque la variable prend la valeur  $e^{-i q_k \Delta}$ . Pour isoler l'onde  $m$ , il faut chercher les coefficients du polynôme admettant  $e^{-i q_k \Delta}$ ,  $k \neq m$  comme racines.

.../...

En pratique on se contente de rechercher des polynômes pour lesquels  $e^{-i q k \Delta}$  sont des zéros approchés, l'élimination rigoureuse étant impossible en général. De plus on ne cherche pas à isoler une onde unique mais une bande de fréquence plus ou moins étroite.

Enfin, remarquons que l'application successive de plusieurs combinaisons revient à faire le produit des facteurs  $J$  et la somme des déphasages  $\epsilon$  correspondants.

Les deux méthodes décrites ci-après sont une application de ces principes.

## 2.2. Méthode des heures spéciales

Cette méthode, due à DARWIN, est basée sur la constatation que les phases des ondes de période  $T_\ell$  prennent la même valeur à des instants séparés de  $T_\ell$  tandis que les phases des autres ondes prennent des valeurs à peu près uniformément réparties sur  $[0, 2\pi]$ , pourvu que la durée d'observation considérée soit assez longue.

Le filtrage destiné à isoler l'onde  $\ell$  s'effectue en deux étapes :

- séparation de la contribution de  $\ell$  et de ses harmoniques
- séparation de  $\ell$  : calcul de  $A_\ell$  et  $\alpha_\ell$

On en déduit facilement  $H_\ell$  et  $g_\ell$  :

$$H_\ell = \frac{A_\ell}{T_\ell}$$

$$g_\ell = \alpha_\ell + v_{0\ell} + \nu_\ell$$

### 2.2.1. Séparation de $\ell$ et de ses harmoniques

Soit  $T_\ell$  la période de  $\ell$  :

$$T_\ell = \frac{2\pi}{\omega_\ell}$$

$T_\ell$  est encore appelé jour spécial de l'onde  $\ell$ . Supposons que la durée  $T$  d'observation contienne un nombre  $s$  de jours spéciaux de l'onde  $\ell$ .

On peut calculer, pour  $t$  compris entre 0 et  $T_\ell$  la quantité  $y_\ell$  :

$$y_\ell(t) = \frac{1}{s} \sum_{r=0}^{s-1} h(t + r T_\ell)$$

.....

La fonction de transfert du filtre  $F_\ell$  ainsi réalisé est, d'après (3) :

$$\hat{F}_\ell(\nu) = \frac{1}{s} \sum_{r=0}^{s-1} e^{2i\pi\nu r T_\ell}$$

$$\text{soit } \hat{F}_\ell(\nu) = e^{i\pi(s-1)\frac{\nu}{\nu_\ell}} \frac{\sin \pi s \frac{\nu}{\nu_\ell}}{s \sin \pi \frac{\nu}{\nu_\ell}}$$

avec  $\nu_\ell = \frac{1}{T_\ell}$ , fréquence de l'onde  $\ell$ .

Le module de  $\hat{F}_\ell$  est représenté sur la figure 1.

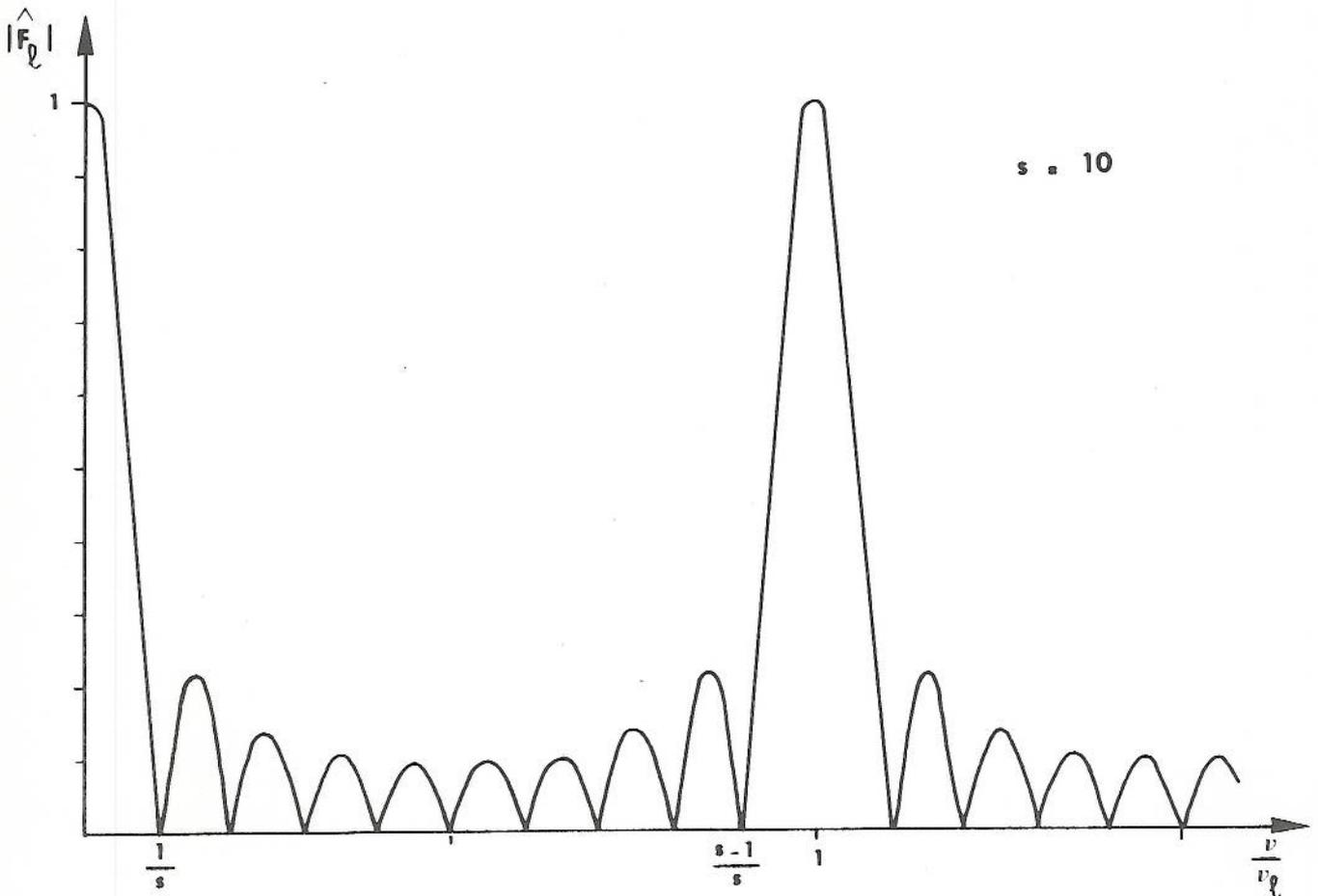


Figure 1

Introduisons  $\epsilon$  défini pour une fréquence  $\nu$  donnée par :

$$\begin{cases} \nu = (k + \epsilon) \nu_\ell \\ |\epsilon| \leq 0,5 \quad \text{et } k \text{ entier} \end{cases}$$

On constate (voir figure 1) que  $|\hat{F}_\ell(\nu)|$  est petit pour :

$$|\epsilon| \geq \frac{1}{s}$$

soit  $sT_\ell | \nu - k\nu_\ell | \geq 1$

$sT_\ell$  représentant la durée d'observation, on retrouve le critère de Rayleigh. Remarquons que  $\hat{F}_\ell(\nu)$  s'annule lorsque  $s\epsilon$  est entier.

Le critère de séparation étant vérifié, on peut alors négliger dans  $y_\ell$  les résidus des ondes autres que les harmoniques de  $\ell$  et écrire :

$$y_\ell(t) \approx A_0 + \sum_{k=1}^n A_{\ell k} \cos(k\nu_\ell t - \alpha_{\ell k})$$

où  $n$  est le nombre d'harmoniques de  $\ell$  à rechercher et  $A_0$  le niveau moyen relatif à la période d'observation.

### 2.2.2. Séparation de l'harmonique $\ell k$

$y_\ell$  est une fonction périodique et de période  $T_\ell$ . Pour isoler la contribution de l'onde  $\ell k$ , il suffit de calculer le coefficient d'ordre  $k$  de sa série de Fourier (voir appendice 1).

Pratiquement,  $k$  est toujours inférieur à 12. On calcule successivement :

$$y_{\ell r} = y_\ell \left( r \frac{T_\ell}{24} \right) \quad \text{pour } r = 0, 1, \dots, 23$$

$$\text{et } z_{\ell k} = \frac{1}{24} \sum_{r=0}^{23} y_{\ell r} e^{-2i\pi \frac{kr}{24}} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n$$

d'où  $A_{\ell k}$  et  $\alpha_{\ell k}$  à partir de la relation :

$$z_{\ell k} = B_{\ell k} e^{-i\alpha_{\ell k}} \quad \text{avec } \begin{cases} B_{\ell k} = \frac{1}{2} A_{\ell k} & \text{si } \ell \text{ et } k \neq 0 \\ B_{00} = A_0 \end{cases}$$

Le calcul de  $z_{\ell k}$  correspond à l'application d'un filtre  $F_{\ell k}$  dont la fonction de transfert est, d'après (3) :

$$\hat{F}_{\ell k}(r) = \frac{1}{24} \sum_{r=0}^{23} e^{\frac{2i\pi r}{24} (rT_\ell - k)}$$

Posons

$$x = \frac{r - k r_\ell}{r_\ell}$$

$$\widehat{F}_{\ell k}(v) = e^{\frac{23}{24} i \pi x} \frac{\sin \pi x}{24 \sin \frac{\pi x}{24}}$$

$\widehat{F}_{\ell k}$  a des propriétés analogues à celles de  $\widehat{F}_{\ell}$  (Fig. 2).

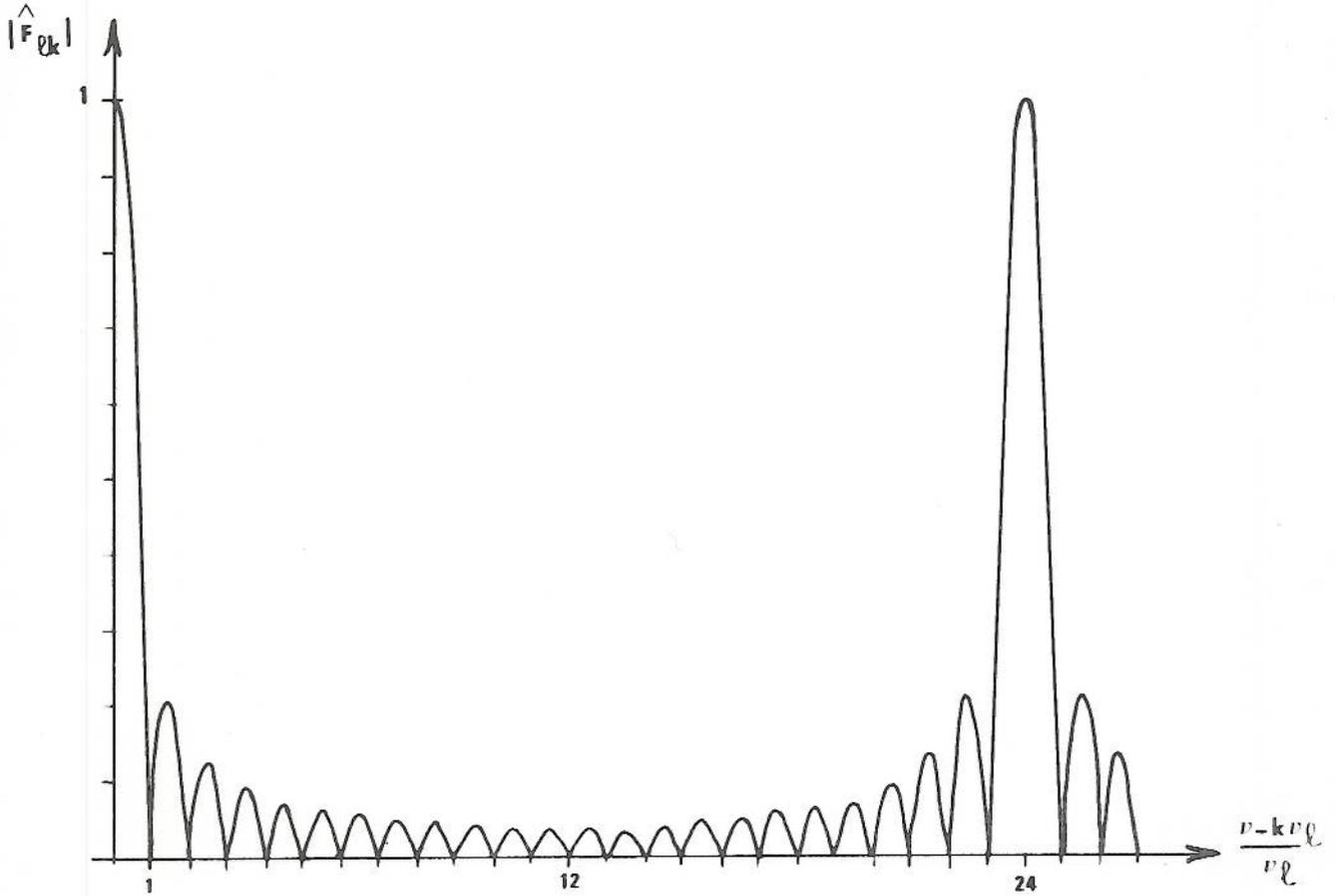


Figure 2

$F_{\ell k}$  élimine les harmoniques de  $\ell$  autres que l'harmonique  $k$ . En outre, il atténue les résidus des autres familles d'ondes présents dans  $y_{\ell}$ .

La quantité  $\frac{T_{\ell}}{24}$  est appelée heure spéciale de l'onde  $\ell$ .

### 2.2.3. Remarques

a) Calcul des hauteurs spéciales  $y_{\ell r}$

Deux méthodes sont possibles :

- on effectue une interpolation linéaire ou parabolique à partir des hauteurs horaires

.../...

- on remplace chaque hauteur spéciale par la hauteur horaire la plus proche.

Cette deuxième technique a l'avantage de la simplicité. Pour une durée d'observation assez longue, elle donne des résultats satisfaisants. En effet, l'écart  $v$  entre l'heure spéciale et l'heure ronde la plus proche est alors à peu près uniformément réparti sur l'intervalle  $[-\epsilon, +\epsilon]$  avec  $\epsilon = 30$  mn et on peut écrire :

$$y_e(t) \approx A_0 + \sum_{k=1}^n \left\{ A_{ek} \left( \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \cos(kq_e(t+v) - \alpha_{ek}) dv \right) \right\}$$

soit

$$y_e(t) \approx A_0 + \sum_{k=1}^n \beta_{ek} A_{ek} \cos(kq_e t - \alpha_{ek})$$

avec  $\beta_{ek} = \frac{\sin(kq_e \epsilon)}{kq_e \epsilon}$

Il suffira de diviser les amplitudes calculées par  $\beta_{ek}$ .

#### b) méthode des constantes approchées

Lorsqu'on recherche une onde de faible amplitude, les résidus d'ondes importantes, comme  $M_2$ , ne sont pas négligeables. Dans la méthode des constantes approchées, due à M. EYRIES, on effectue l'analyse d'une marée-différence obtenue en retranchant aux hauteurs observées la marée calculée à l'aide de constantes approchées déterminées à partir d'une première analyse ou à l'aide des constantes d'un port voisin. Cette marée-différence ne contient alors plus d'onde prépondérante. Les constantes définitives sont obtenues par la combinaison appropriée des constantes approchées et des constantes de la marée différence.

#### c) recherche des ondes à longue période

Dans le cas des ondes à longues périodes, l'intervalle séparant deux hauteurs spéciales est assez long et l'application de la méthode décrite plus haut conduit à n'utiliser que quelques hauteurs horaires. Pour diminuer l'influence des erreurs accidentelles, on préfère effectuer un filtrage préalable en substituant aux hauteurs horaires les valeurs moyennes prises sur des intervalles d'une durée voisine de l'heure spéciale, par exemple 12 heures pour les ondes mensuelles et semi-mensuelles, 15 jours pour les ondes annuelles et semi-annuelles.

### 2.3. Méthode de DOODSON

Dans la méthode d'analyse établie par DOODSON en 1928, on sépare successivement les différentes espèces à l'aide de combinaisons journalières appropriées des hauteurs horaires puis les groupes à l'intérieur de chaque espèce à l'aide de combinaisons mensuelles des valeurs précédentes et enfin les sous-groupes à l'intérieur de chaque groupe à l'aide de combinaisons annuelles. La séparation n'est pas parfaite mais on tient compte des résidus les plus importants dans les expressions finales.

Cette méthode suppose que l'on dispose d'une année complète d'observations horaires consécutives : l'établissement de 213 combinaisons de ces hauteurs horaires permet alors d'obtenir les constantes de 60 composantes. Elle peut être adaptée à des périodes plus courtes (1, 2 ou 15 jours ; 1 ou 3 mois) à condition de faire des hypothèses supplémentaires sur le rapport des amplitudes et sur le déphasage des ondes non séparées sur ces périodes.

Le principe du filtrage employé repose sur un certain nombre d'approximations.

Nous avons vu au chapitre VI que la vitesse angulaire  $q$  d'une onde se met sous la forme :

$$q = n_1 \dot{\tau} + n_2 \dot{s} + n_3 \dot{h} + n_4 \dot{p} + n_5 \dot{N} + n_6 \dot{p}_1$$

où les  $n_j$  ( $j = 1$  à  $6$ ) sont des entiers et :

$$\dot{\tau} = 360^\circ/\text{jour} - (\dot{s} - \dot{h})$$

$$\dot{s} - \dot{h} = 12, 1907^\circ/\text{jour}$$

$$\dot{h} = 0, 9856^\circ/\text{jour}$$

En négligeant les termes en  $\dot{p}$ ,  $\dot{N}$  et  $\dot{p}_1$  et en posant :

$$a = n_1$$

$$b = n_2 - n_1$$

$$c = n_2 + n_3$$

On peut écrire :

$$q \approx \left( a + \frac{b}{T_1} + \frac{c}{T_2} \right) \frac{2\pi}{24} \text{ radian/heure} \quad \text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des entiers et :}$$

$$T_1 \approx N_1 \text{ jours est la période de } s-h,$$

$$T_2 \approx N_2 \cdot T_1 \text{ est la période de } h,$$

où  $N_1$  et  $N_2$  valent respectivement 29 et 12.

L'onde cherchée peut être assimilée à l'harmonique d'ordre

$P = a N_2 N_1 + b N_2 + c$  de la série de Fourier de  $h$  sur la période  $T_2$ . Si on dispose de :

$N = 24 \times N_1 \times N_2$  observations horaires  $h_r$  ( $r = 0, \dots, N-1$ ), on peut

écrire :

$$B e^{-i \alpha k} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} h_r e^{-2i \pi \frac{P r}{N}} \quad \text{avec } \begin{cases} B = A & \text{si } P = 0 \\ B = \frac{1}{2} A & \text{si } P \neq 0 \end{cases}$$

.../...

### 3. La méthode des moindres carrés

Le principe de cette méthode est connu depuis les travaux de GAUSS et LEGENDRE mais le volume des calculs nécessaires n'a permis son application à l'analyse des observations de marée qu'avec la mise en service d'ordinateurs assez puissants. Elle a l'avantage de n'imposer aucune restriction à la forme des observations.

#### 3.1. Principe

La hauteur d'eau due à la marée peut s'écrire :

$$hm(t) = H_0 + \sum_{\ell=1}^M f_{\ell} H_{\ell} \cos(q_{\ell}t + v_{0\ell} + u_{\ell} - g_{\ell})$$

$$\text{soit } hm(t) = \sum_{\ell=-M}^M x_{\ell} a_{\ell}(t)$$

$$\text{où } x_0 = H_0$$

$$a_0(t) = 1$$

$$x_{\ell} = \frac{1}{2} H_{\ell} e^{-ig_{\ell}}$$

$$x_{-\ell} = \frac{1}{2} H_{\ell} e^{ig_{\ell}} = \overline{x_{\ell}}$$

$$a_{\ell}(t) = f_{\ell} e^{i(q_{\ell}t + v_{0\ell} + u_{\ell})}$$

$$a_{-\ell}(t) = f_{\ell} e^{-i(q_{\ell}t + v_{0\ell} + u_{\ell})} = \overline{a_{\ell}(t)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \ell = 1, \dots, M$$

Soit  $\{t_n \mid n = 1, \dots, N\}$  la suite des instants d'observation de  $h$ .

On peut former  $N$  équations d'observation :

$$h_n = \sum_{\ell=-M}^M a_{\ell n} x_{\ell} + b_n, \quad n = 1, \dots, N$$

où

$$h_n = h(t_n)$$

$$b_n = b(t_n)$$

$$a_{\ell n} = a_{\ell}(t_n)$$

Pour déterminer les inconnues  $x_{\ell}$ , on fait l'hypothèse que le bruit  $b$  suit une loi de probabilité gaussienne et centrée (voir appendice I) cela suppose, en particulier, qu'il n'y a pas d'erreur systématique dans les observations. La solution la plus probable est alors celle qui rend

minimum la quantité  $\sum_{n=1}^N b_n^2$ .

Posons :

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{-M1} & \dots & a_{M1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{-MN} & \dots & a_{MN} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{-M} \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}$$

Les équations normales s'écrivent (voir annexe I) :

$$(4) A^* AX = A^* H$$

où  $A^*$  est la matrice adjointe de  $A$  :

$$A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{-M1}} & \dots & \overline{a_{-MN}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{M1}} & \dots & \overline{a_{MN}} \end{bmatrix}$$

$X$  est solution du système linéaire de  $(2M + 1)$  équations à  $(2M + 1)$  inconnues :

$$\sum_{\ell=-M}^M c_{m\ell} x_{\ell} = d_m, \quad m = -M, \dots, 0, \dots, M$$

avec

$$c_{m\ell} = \sum_{n=1}^N \overline{a_{mn}} a_{\ell n} = \sum_{n=1}^N f_m f_{\ell} e^{-i[(q_{\ell} - q_m) t_n + V_{o\ell} - V_{om} + u_{\ell} - u_m]}$$

$$d_m = \sum_{n=1}^N \overline{a_{mn}} h_n = \sum_{n=1}^N f_m h_n e^{-i[q_m t_n + V_{om} + u_m]}$$

Il existe plusieurs méthodes de résolution des systèmes linéaires.

On choisira une méthode directe ou une méthode itérative suivant la taille et la configuration de la matrice  $C$  des  $c_{m\ell}$ . Notons que cette matrice est hermitienne ( $c_{m\ell} = \overline{c_{\ell m}}$ ) et que

$$c_{mm} = Nf_m^2$$

Il n'y a pas de limitation théorique au nombre d'ondes que l'on peut rechercher. Mais il ne faut pas perdre de vue que les calculs sont toujours effectués avec une précision limitée : la solution n'est bien déterminée (méthodes directes) ou la vitesse de convergence n'est suffisante (méthodes itératives) que si la matrice du système est bien conditionnée, c'est-à-dire si une petite variation des coefficients ou du second membre n'entraîne pas de variations importantes de la solution. Ce conditionnement est d'autant moins bon que le produit des normes de  $C$  et de  $C^{-1}$  est grand. Cela revient pratiquement à imposer aux vitesses angulaires des ondes recherchées de vérifier un critère analogue au critère de Rayleigh.

### 3.2. Cas des observations périodiques

Supposons que la suite  $\{t_n\}$  vérifie :

$$t_n = t_1 + (n - 1) \Delta \quad , \quad n = 1, \dots, N$$

où  $\Delta$  est le pas d'échantillonnage des observations (l'heure habituellement).

Si les corrections nodales  $f$  et  $u$  peuvent être prises constantes sur la période d'observation, on peut calculer analytiquement les coefficients  $c_{m\ell}$  :

$$c_{m\ell} = f_m f_\ell e^{i(V_{o\ell} + u_\ell - V_{om} - u_m)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(q_\ell - q_m)(t_1 + n\Delta)}$$

$$c_{m\ell} = f_m f_\ell e^{i\alpha_{m\ell}} \frac{\sin\left(\frac{q_\ell - q_m}{2} N\Delta\right)}{\sin\left(\frac{q_\ell - q_m}{2} \Delta\right)}$$

avec  $\alpha_{m\ell} = (q_\ell - q_m)\left(t_1 + \frac{N-1}{2}\Delta\right) + V_{o\ell} + u_\ell - V_{om} - u_m$

La solution du système est immédiate si les  $c_{m\ell}$  ( $\ell \neq m$ ) sont nuls, c'est-à-dire si :

$$(q_\ell - q_m) N\Delta = 2k\pi \quad \forall \ell \text{ et } m, \quad \ell \neq m$$

soit si la période d'observation  $T = N\Delta$  est une période de  $h_m$ . Cette condition ne peut être vérifiée exactement. On se contente d'imposer :

$$|c_{m\ell}| \ll |c_{mm}| = N f_m^2 \quad (\ell \neq m)$$

soit

$$\left| \frac{\sin\left(\frac{q_\ell - q_m}{2} N\Delta\right)}{\sin\left(\frac{q_\ell - q_m}{2} \Delta\right)} \right| \ll N \frac{f_m}{f}$$

comme  $f_m$  et  $f_\ell$  sont de l'ordre de l'unité, cette condition devient, compte tenu des propriétés de la fonction  $\frac{\sin Nx}{\sin x}$

$$2\pi \ll |q_\ell - q_m| N\Delta \leq 2(N-1)\pi$$

On retrouve d'une part le critère de Rayleigh ( $2\pi \ll |q_\ell - q_m| T$ ) et d'autre part la condition relative au pas d'échantillonnage ( $|q_\ell - q_m| \ll \frac{\pi}{\Delta}$ ) rappelée au § 1.4.

Si ces deux conditions sont vérifiées, la matrice  $C$  est alors à diagonale dominante et le système correspondant est bien conditionné.

La formule d'itération de WATT fournit une méthode très efficace pour le calcul des éléments  $d_m$  :

$$d_m = f_m e^{-i(q_m t_1 + V_{om} + u_m)} \sum_{n=0}^{N-1} h_{n+1} e^{-iq_m n\Delta}$$

Posons  $y_N = 0$

$$y_{N-1} = h_N$$

$$y_n = h_{n+1} + 2y_{n+1} \cos \theta - y_{n+2} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N-2$$

On vérifie, par récurrence, que :

$$y_{N-R} = \sum_{r=0}^{R-1} h_{N-R+r+1} \frac{\sin(r+1)\theta}{\sin \theta}$$

$$\text{d'où } y_1 = \sum_{r=0}^{N-2} h_{r+2} \frac{\sin(r+1)\theta}{\sin \theta}$$

$$y_0 = \sum_{r=0}^{N-1} h_{r+1} \frac{\sin(r+1)\theta}{\sin \theta}$$

$$\text{soit } y_1 \sin \theta = \sum_{r=1}^{N-1} h_{r+1} \sin r \theta = \sum_{r=0}^{N-1} h_{r+1} \sin r \theta$$

$$y_0 - y_1 \cos \theta = \sum_{r=0}^{N-1} h_{r+1} \cos r \theta$$

$$y_0 - y_1 e^{+i\theta} = \sum_{r=0}^{N-1} h_{r+1} e^{-ir\theta}$$

Pour calculer  $d_m$ , on déterminera la suite  $\{y_n\}$  correspondant à  $\theta = q_m \Delta$ . Cette méthode a l'avantage de ne faire intervenir qu'un sinus et un cosinus au lieu de  $N$  sinus et  $N$  cosinus pour le calcul direct.

### 3.3. Recherche d'ondes mal séparées

Il peut arriver que la durée des observations disponibles ne permette pas de séparer deux ondes importantes. C'est le cas, par exemple, pour  $S_2$  et  $K_2$  si on ne dispose pas de 146 jours d'observations.

La méthode des moindres carrés permet, par la prise en compte d'hypothèses supplémentaires, l'estimation des constantes d'ondes mal séparées et donc l'analyse des courtes périodes d'observation.

On suppose que les rapports

.../...

$$\rho_{\ell_k} = \frac{H_{\ell_k}}{H_{\ell}}$$

$$\beta_{\ell_k} = \left( \frac{g_{\ell_k} - g_{\ell}}{q_{\ell_k} - q_{\ell}} \right) / \left( \frac{g_n - g_{\ell}}{q_n - q_{\ell}} \right)$$

sont connus, soit à partir des constantes harmoniques d'un port voisin, soit à partir du potentiel générateur :

$$\rho_{\ell_k} = \frac{G_{\ell_k}}{G_{\ell}} \quad \text{et} \quad \beta_{\ell_k} = 1$$

On prendra, par exemple, pour onde  $n$ , parmi les ondes séparées, celle qui vérifie :

$$|q_{\ell_k} - q_n| \leq |q_{\ell_k} - q_j| \quad \forall j \neq \ell$$

On a :

$$H_{\ell_k} = \rho_{\ell_k} H_{\ell}$$

$$g_{\ell_k} = g_{\ell} + \beta_{\ell_k} (g_n - g_{\ell}) \frac{q_{\ell_k} - q_{\ell}}{q_n - q_{\ell}} = g_{\ell} + \delta g_{\ell_k}$$

et on peut toujours écrire la hauteur due à la marée sous la forme :

$$hm(t) = \sum_{\ell=-M}^M x_{\ell} a_{\ell}(t)$$

où la sommation est étendue aux ondes séparées et :

$$x_0 = H_0$$

$$x_{\ell} = \frac{1}{2} H_{\ell} e^{-ig_{\ell}} = \frac{1}{2} x_{-\ell}$$

$$a_{\ell}(t) = r_{\ell} e^{i(q_{\ell} t + V_{0\ell} t + u_{\ell})} + \sum_{k=1}^{m_{\ell}} r_{\ell_k} \rho_{\ell_k} e^{-i\delta g_{\ell_k}} e^{i(q_{\ell_k} t + V_{0\ell_k} t + u_{\ell_k})}$$

$g_n - g_{\ell}$  n'étant pas connu, on ne peut déterminer exactement  $a_{\ell}$ . On effectue le calcul par approximations successives : on suppose d'abord que  $\delta g_{\ell_k} = 0$  d'où la possibilité de calculer  $a_{\ell}$  et de résoudre le système (1), ce qui donne une meilleure approximation de  $g_n - g_{\ell}$ . Une deuxième résolution suffit alors pour déterminer les constantes avec une bonne précision.

#### 4. La méthode des hauteurs réduites

##### 4.1. Introduction

C'est la méthode utilisée depuis 1974 au Service Hydrographique et Océanographique de la Marine. Elle est basée sur un filtrage préalable - suivant une technique due à M. DEMERLIAC - destiné à isoler les bandes de fréquence correspondant aux différentes espèces des ondes marées. Cette séparation permet, d'une part, de diminuer l'influence du bruit sur le résultat de l'analyse et, d'autre part, de réduire le temps de calcul, la résolution faisant intervenir des systèmes linéaires de taille réduite.

Cette méthode ne s'applique qu'à l'analyse des observations périodiques. Elle n'est rentable que si les observations ne comportent pas trop de lacunes, le filtrage faisant perdre un jour aux extrémités de chaque tronçon d'observations continues.

#### 4.2. La réduction des hauteurs

Nous avons vu que la marée est une somme d'un certain nombre d'ondes dont les fréquences sont voisines de  $k$  cycles/jour, où  $k$  est le numéro de l'espèce ( $k = 0, 1, 2, 4, 6, 8, \dots$ ). La contribution de chaque espèce à la marée totale peut donc être représentée par une onde de fréquence  $k$  cycles/jour dont l'amplitude et la phase varient lentement au cours du temps. Dans la méthode des hauteurs réduites, cette modulation de chaque espèce est assimilée à un développement limité au second ordre, sur une période de deux jours :

La hauteur de la marée à l'instant  $t$  s'écrit :

$$hm(t) = \sum_k \sum_j r_{jk} e^{i q_{jk} t} = \sum_k S_k(t)$$

où  $r_{00} = A_0$

$$r_{j0} = \frac{1}{2} A_{j0} e^{-\alpha_{j0}} = \overline{r_{(-j)0}}$$

$$r_{jk} = \frac{1}{2} A_{jk} e^{-\alpha_{jk}} = \overline{r_{j(-k)}} \quad , \quad k \neq 0$$

$$q_{j0} = - q_{(-j)0}$$

$$q_{jk} = - q_{j(-k)} \quad , \quad k \neq 0$$

$A_{jk}$  ( $j \geq 0, k \geq 0$ ) est le rayon de l'onde  $j$  de l'espèce  $k$  et  $\alpha_{jk}$  sa phase à l'instant  $t = 0$ .

On a :

$$q_{jk} = 2\pi k + 2\pi \epsilon_{jk}$$

Le temps  $t$  étant compté en jours et  $q_{jk}$  en radians/jour.

$$d'où : \quad hm(t) = \sum_k e^{2i\pi kt} \sum_j r_{jk} e^{2i\pi \epsilon_{jk} t}$$

.../...

$c_{,jk}$  étant petit, la quantité  $C_{,jk}(t) = r_{,jk} e^{2i\pi\epsilon_{,jk}t}$  varie lentement avec le temps et on peut l'assimiler à un polynôme du second degré sur une période de deux jours.

Posons :

$$t = T + \theta$$

et effectuons un développement limité de  $C_{,jk}$  au voisinage de  $T$  :

$$C_{,jk}(t) = e^{2i\pi\epsilon_{,jk}T} (r_{,jk} + \lambda_{,jk}\theta + \mu_{,jk}\theta^2)$$

donc :

$$(5) \left\{ \begin{aligned} hm(t-1) &= \sum_k e^{2i\pi kt} \sum_j e^{2i\pi\epsilon_{,jk}T} (r_{,jk} + \lambda_{,jk}(\theta-1) + \mu_{,jk}(\theta-1)^2) \\ hm(t) &= \sum_k e^{2i\pi kt} \sum_j e^{2i\pi\epsilon_{,jk}T} (r_{,jk} + \lambda_{,jk}\theta + \mu_{,jk}\theta^2) \\ hm(t+1) &= \sum_k e^{2i\pi kt} \sum_j e^{2i\pi\epsilon_{,jk}T} (r_{,jk} + \lambda_{,jk}(\theta+1) + \mu_{,jk}(\theta+1)^2) \end{aligned} \right.$$

$$\text{Posons } R(T, t) = \sum_k e^{2i\pi kt} \sum_j r_{,jk} e^{2i\pi\epsilon_{,jk}T}$$

On obtient, à partir des relations (5) :

$$(6) R(T, t) = hm(t) - \frac{hm(t+1) - hm(t-1)}{2} (t - T) + \left[ \frac{hm(t+1) + hm(t-1)}{2} - hm(t) \right] (t - T)^2$$

$R(T, t)$  est le polynôme du second degré en  $T$  qui coïncide avec  $hm(t)$  aux instants  $T = t, t+1$  et  $t-1$

Introduisons la modulation du vecteur représentatif de l'espèce  $k$  :

$$C_k(t) = \sum_j C_{,jk}(t)$$

$R(T, t)$  s'écrit alors :

$$R(T, t) = \sum_k C_k(T) e^{2i\pi kt}$$

$T$  étant fixé,  $C_k(T)$  est le coefficient d'ordre  $k$  de la série de Fourier de  $R(T, t)$  sur une période de base de 1 jour. Si on peut supposer que :

$$|C_k(T)| = 0 \quad \text{pour } |k| \geq M/2$$

la série de Fourier est finie et on peut calculer facilement ses coefficients (voir appendice 1) :

.../...

$$C_k(T) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} R(T, t_0 + \frac{n}{M}) e^{-2i\pi k (\frac{n}{M} + t_0)}$$

Le vecteur représentatif de l'espèce  $k$  est :

$$S_k(t) = \sum_j r_{jk} e^{iq_{jk} t}$$

$$S_k(t) = e^{2i\pi kt} C_k(t)$$

d'où

$$(7) \quad S_k(T) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} R(T, t_0 + \frac{n}{M}) e^{-2i\pi k (\frac{n}{M} + t_0 - T)}$$

Les formules (6) et (7) permettent donc d'isoler la somme géométrique des ondes de l'espèce  $k$  à l'instant  $t$ .

Comme :  $S_k(t) = \overline{S_{-k}(t)}$

il suffit d'appliquer la formule (7) pour  $0 \leq k \leq M/2$

L'approximation polynomiale de  $C_{jk}$  étant valable sur une période de deux jours, on prendra  $t_0$  tel que :

$$T - \frac{1}{2} \leq t_0 \leq T + \frac{1}{2}$$

soit

$$T - \frac{1}{2} \leq t_0 + \frac{n}{M} < T + \frac{3}{2} \quad \text{pour } 0 \leq n \leq M - 1$$

En appliquant les formules (6) et (7) aux hauteurs observées, on réalise un filtrage qui élimine non seulement la contribution des ondes des espèces  $l, l \neq k$  mais qui réduit en outre la contribution éventuelle du bruit. En effet, la fonction de transfert  $\hat{F}_k(v)$  du filtre se calcule assez facilement lorsque :

$$t_0 - T = \text{constante} = \frac{M-1}{2M}$$

$$\hat{F}_k(v) = \left( \frac{\sin \pi \sigma}{M \sin \frac{\pi \sigma}{M}} \right)^3 \left( 1 + \frac{M^2 - 1}{2} \sin^2 \frac{\pi \sigma}{M} \right)$$

avec  $\sigma = k - v$

$\hat{F}_k(v)$  est alors réel et symétrique autour de la fréquence  $v = k$ .

De plus :

$$\hat{F}_k(k) = 1$$

$$\hat{F}_k(\ell) = 0 \quad \text{pour} \quad \ell \neq k$$

$\hat{F}_k(\nu)$  est représenté sur la figure 3 pour  $M = 24$

$$|\hat{F}_k(\nu)| < 0,12$$

pour  $|\sigma| > 0,7$  cycle/jour

Notons que si  $h$  est connu pour  $t$  compris entre  $T_1$  et  $T_2$ , on peut calculer  $S_k$  pour  $t$  compris entre  $T_1 + 1$  et  $T_2 - 1$  : le filtrage fait perdre 2 jours d'observation.

On peut améliorer le filtrage réalisé en effectuant un développement de  $C$  au 3<sup>ème</sup> ordre en  $\theta$  et en remplaçant  $R(T, t)$  par le polynôme du 3<sup>ème</sup> degré<sup>jk</sup> qui coïncide avec  $h(t)$  aux instants

$t - \frac{3}{2}$ ,  $t - \frac{1}{2}$ ,  $t + \frac{1}{2}$ , et  $t + \frac{3}{2}$ . Le filtre ainsi réalisé a alors pour fonction de transfert, pour  $t_0 - T = \frac{M-1}{2M}$

$$\hat{F}'_k(\nu) = \left( \frac{\sin \frac{\pi \sigma}{M}}{M \sin \frac{\pi \sigma}{M}} \right)^4 \left( \frac{4M^2 - 1}{6} \sin^2 \frac{\pi \sigma}{M} + 1 \right) \cos \frac{\pi \sigma}{M}$$

avec  $\sigma = k - \nu$  (Figure 4). On a alors :

$$|\hat{F}'_k(\nu)| < 0,05$$

pour  $|\sigma| > 0,7$  cycle/jour

mais on perd cette fois 3 jours d'observation.

La technique des hauteurs réduites permet de traiter les observations échantillonnées avec un pas  $\frac{1}{M}$  jour où  $M$  est un entier quelconque.

Remarque :

Les ondes de l'espèce  $k$  ont leurs vitesses angulaires centrées autour de  $k$  cycles/jour lunaire plutôt que autour de  $k$  cycles/jour.

L'écart entre les deux devient important pour les espèces huitième-diurnes et au-delà. Il est alors préférable, pour l'étude de ces espèces, d'utiliser le jour lunaire comme unité de temps. Pour cela, il faut ré-échantillonner les observations avec un pas  $1/M$  jour lunaire ou  $M$  est entier. Cette opération peut être réalisée par interpolation parabolique sur la série des hauteurs observées.

.../...

### 4.3. Calcul des constantes harmoniques

Deux méthodes de calcul ont été développées. La première qui utilise la technique des moindres carrés permet de traiter les enregistrements comportant des lacunes et d'introduire des relations supplémentaires pour l'estimation des constantes des ondes mal séparées. La seconde est basée sur un développement en série de Fourier des  $C_k$ . Elle suppose que les observations sont continues et que toutes les ondes recherchées sont bien séparées.

#### 4.3.1. Méthode des moindres carrés

C'est une application de la méthode décrite au § 3 dans laquelle on ne recherche plus que les ondes d'une seule espèce à la fois. Les équations d'observations relatives à l'espèce  $K$  s'écrivent :

$$S_k(t_n) = \sum_j \hat{F}_k(p_{jk}) r_{jk} e^{iq_{jk} t_n}$$

Comme  $|p_{jk} - k| < 0,3$  cycle/jour et que la série  $S_k$  ne contient pratiquement plus d'énergie à l'extérieur de la bande  $|v-k| < 0,7$  cycle/jour, on se contente de calculer  $S_k$  pour des instants  $t_n$  espacés d'un jour.

Si  $N_k$  est le nombre d'ondes recherchées dans l'espèce  $k$ , la sommation sur  $j$  est étendue de :

$$j = 0 \text{ à } N_k - 1 \quad \text{si } k \neq 0$$

$j = -(N_k - 1) \text{ à } (N_k - 1)$  si  $k = 0$  ( $j = 0$  correspondant alors au niveau moyen).

On peut écrire :

$$S_k(t_n) = \sum_j x_{jk} a_{jk}(t_n)$$

avec

$$x_{00} = \Pi_0$$

$$x_{j0} = \frac{1}{2} \Pi_{j0} e^{-i \theta_{j0}} = \overline{x_{(-j)0}} \quad , \quad j \neq 0$$

$$x_{jk} = \frac{1}{2} \Pi_{jk} e^{-i \theta_{jk}} \quad , \quad k \neq 0$$

$$a_{jk}(t_n) = r_{jk} \hat{F}_k(p_{jk}) e^{i(q_{jk} t_n + v_{0jk} + u_{jk})} \quad , \quad j > 0 \quad , \quad k \geq 0$$

$$a_{00} = 1$$

$$\overline{a_{(-j)0}} = a_{j0} \quad , \quad j \neq 0$$

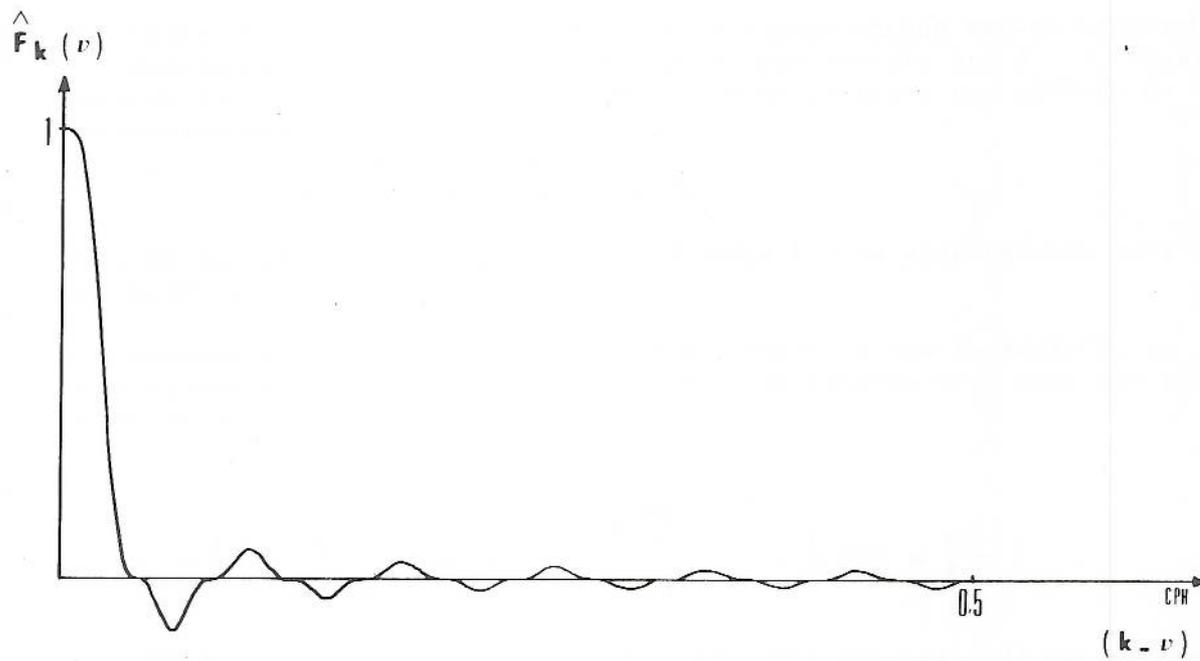


Figure 3  
 Filtre des hauteurs réduites (2<sup>ème</sup> degré)

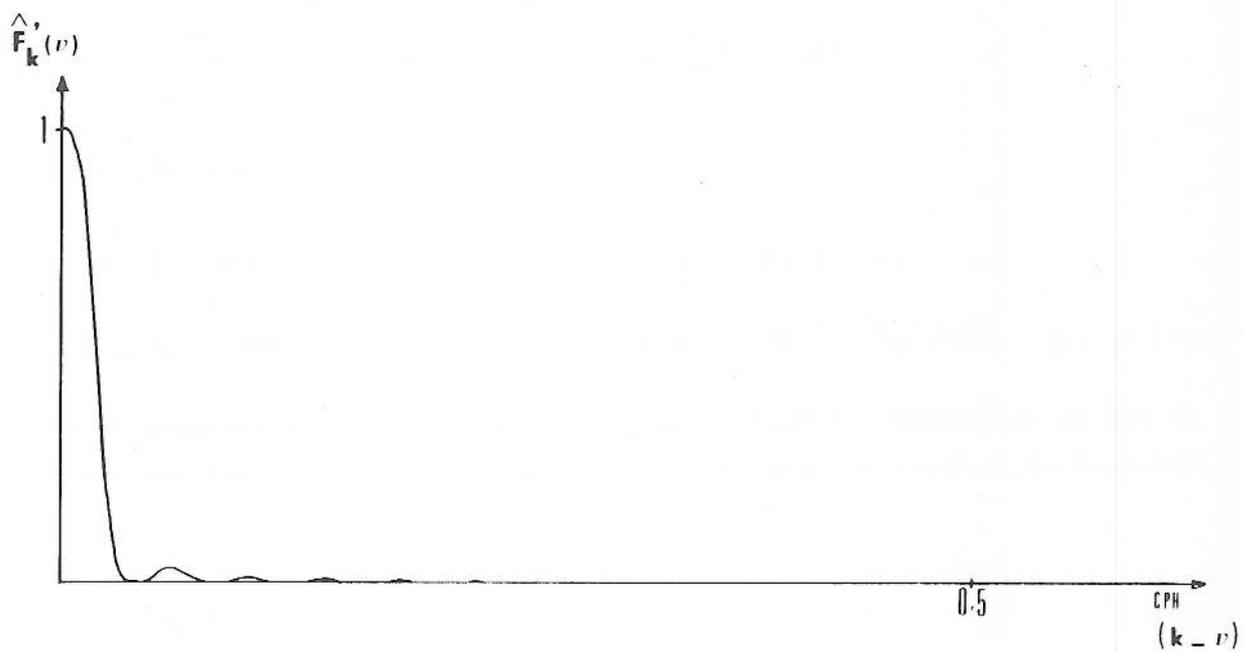


Figure 4  
 Filtre des hauteurs réduites (3<sup>ème</sup> degré)

Les équations pour lesquelles  $m$  ne vérifie par le critère (8) sont alors triviales et il suffit de résoudre le système de  $J$  équations à  $J$  inconnues :

$$G_{m_k} = \sum_{j=1}^J B_{jm_k} r_j, \quad k = 1, \dots, J$$

Si le nombre de composantes recherchées dans une même espèce est trop important, il est possible de décomposer l'espèce en plusieurs groupes, à condition que les résidus dans un groupe des autres groupes puissent être considérés comme négligeables.

Si  $J'$  est le nombre d'ondes recherchées dans un groupe, on forme le système de  $J'$  équations à  $J'$  inconnues :

$$G_{m_k} = \sum_{j=1}^{J'} B_{jm_k} r_j, \quad k = 1, \dots, J'$$

dont la résolution fournit les valeurs de  $r_j$ .

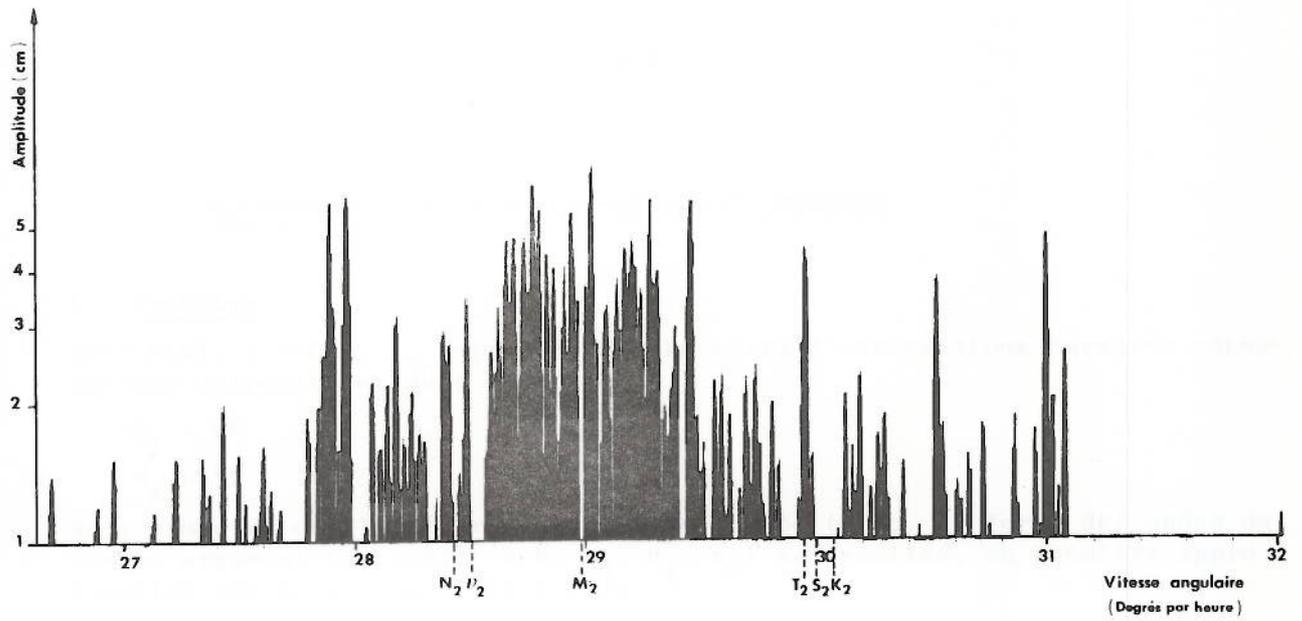
Le calcul des coefficients de la série de Fourier est effectué à l'aide d'un algorithme de transformation de Fourier rapide (FFT). L'algorithme de Cooley-Tukey impose que  $P$  soit une puissance de 2.

#### 5 - Contrôle des erreurs sur les observations

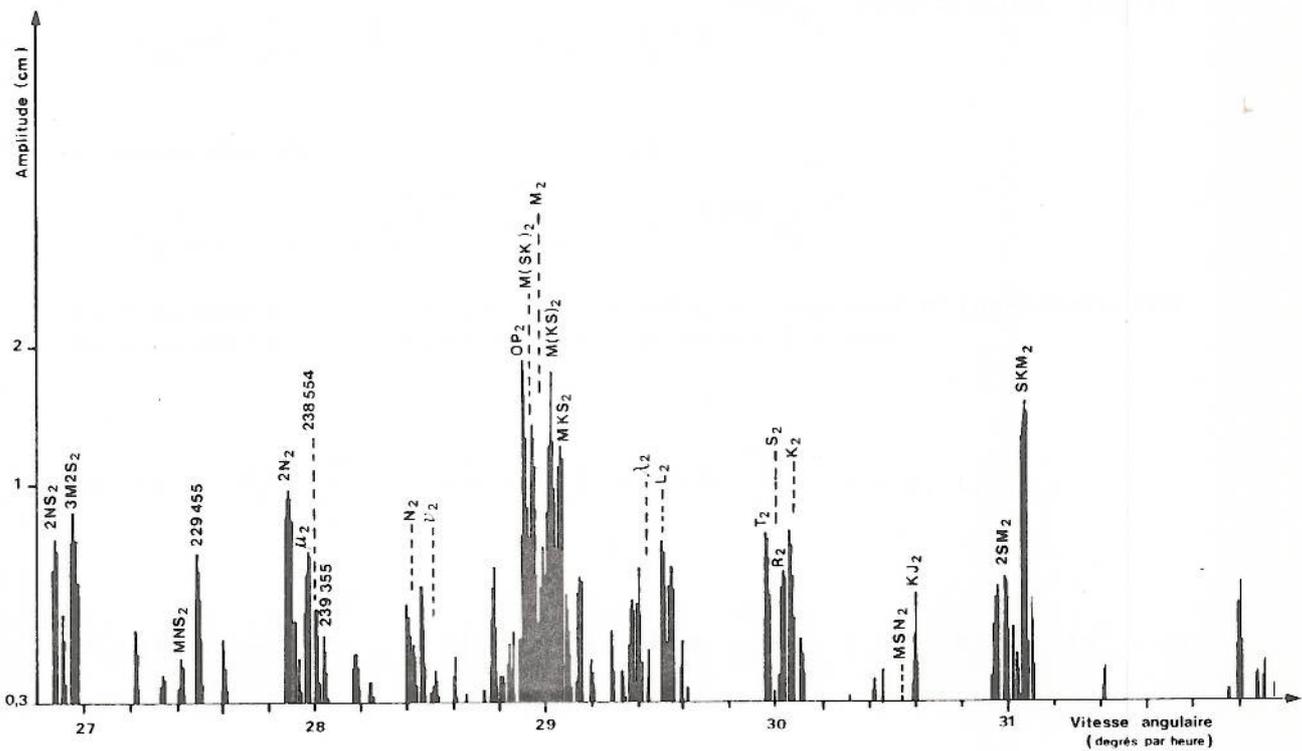
Les techniques d'analyse que nous venons de décrire, éliminent plus ou moins le bruit en supposant qu'il a un caractère aléatoire. Cette hypothèse n'est en général pas vérifiée pour le bruit provoqué par les erreurs d'observation qui ont souvent un caractère systématique. Ces erreurs sont de deux types : erreurs de calage en heure et erreurs de calage en hauteur (voir chapitre II).

Le contrôle des observations lors du dépouillement selon les principes mentionnés au chapitre II (§ 2.4.) doit éliminer les erreurs les plus flagrantes. La comparaison des hauteurs observées et des hauteurs calculées avec les constantes harmoniques déduites d'une première analyse permet également de détecter les erreurs les plus importantes. Celles qui subsistent entraînent une modification du spectre d'amplitude déduit des observations. Les erreurs les plus gênantes de ce point de vue sont celles qui résultent d'un mauvais calage en temps des observations.

La méthode des hauteurs réduites permet une élimination partielle de ce type d'erreur.



Spectre avant recalage



Spectre après recalage

Figure 5— Effet du recalage en temps sur le spectre d'amplitude des ondes semi-diurnes  
Marée du Havre (1963- 64)

$$\left\{ \begin{aligned} R_{abc}^{jrl} &= \frac{1}{N_2} \sum_{m_3=0}^{N_2-1} R_{ab}^{jr(m_3)} \cos \frac{2\pi cm_3}{N_2} \quad c = 0, 1, \dots \text{ et } j = 1, 2 ; r = 1, 2 \\ R_{abc}^{jr2} &= \frac{1}{N_2} \sum_{m_3=0}^{N_2-1} R_{ab}^{jr(m_3)} \sin \frac{2\pi cm_3}{N_2} \quad c = 1, 2, \dots \text{ et } j = 1, 2 ; r = 1, 2 \end{aligned} \right.$$

Alors :

$$F_a = R_a^1 + i R_a^2$$

$$F_{ab} = R_{ab}^{11} + i R_{ab}^{12} + i \left( R_{ab}^{21} + i R_{ab}^{22} \right) = R_{ab}^{11} - R_{ab}^{22} + i \left( R_{ab}^{12} + R_{ab}^{21} \right)$$

$$F_{abc} = R_{abc}^{111} + i R_{abc}^{112} - R_{abc}^{221} - i R_{abc}^{222} + i \left( R_{abc}^{121} + i R_{abc}^{122} + R_{abc}^{211} + i R_{abc}^{212} \right)$$

$$F_{abc} = R_{abc}^{111} - R_{abc}^{122} - R_{abc}^{212} - R_{abc}^{221} + i \left( R_{abc}^{112} + R_{abc}^{121} + R_{abc}^{211} - R_{abc}^{222} \right)$$

Les constantes harmoniques du sous-groupe sont données par :

$$\mathbf{B} \quad \cos \alpha = R_{abc}^{111} - R_{abc}^{122} - R_{abc}^{212} - R_{abc}^{221}$$

$$\mathbf{B} \quad \sin \alpha = R_{abc}^{222} - R_{abc}^{211} - R_{abc}^{121} - R_{abc}^{112}$$

Comme :

$$R_{a(-b)}^{j1} = R_{ab}^{j1} \quad ; \quad R_{a(-b)}^{j2} = -R_{ab}^{j2}$$

$$R_{ab(-c)}^{jrl} = R_{abc}^{jrl} \quad ; \quad R_{ab(-c)}^{jr2} = -R_{abc}^{jr2}$$

$$R_{a(-b)c}^{j1r} = R_{abc}^{j1r} \quad ; \quad R_{a(-b)c}^{j2r} = -R_{abc}^{j2r}$$

Le nombre de combinaisons à calculer peut être réduit dans les cas suivants :

a) Les contributions des ondes (a, b, -c), (a, -b, c) et (a, -b, c) sont négligeables.

$$\mathbf{B} \cos \alpha = R_{abc}^{111} - R_{abc}^{122} - R_{abc}^{212} - R_{abc}^{221}$$

$$0 = R_{abc}^{111} + R_{abc}^{122} + R_{abc}^{212} - R_{abc}^{221}$$

$$0 = R_{abc}^{111} + R_{abc}^{122} - R_{abc}^{212} + R_{abc}^{221}$$

$$0 = R_{abc}^{111} - R_{abc}^{122} + R_{abc}^{212} + R_{abc}^{221}$$

d'où :

$$\mathbf{B} \cos \alpha = 4 R_{abc}^{111} \left( = - 4 R_{abc}^{122} = - 4 R_{abc}^{212} = - 4 R_{abc}^{221} \right)$$

$$\mathbf{B} \sin \alpha = - 4 R_{abc}^{112} \left( = - 4 R_{abc}^{211} = - 4 R_{abc}^{121} = - 4 R_{abc}^{222} \right)$$

Il suffit de calculer successivement  $R_a^1$ ,  $R_{ab}^{11}$ ,  $R_{abc}^{111}$ ,  $R_{abc}^{112}$

b) la contribution de l'onde (a, b, -c) est négligeable.

Alors :

$$\mathbf{B} \cos \alpha = 2 \left( R_{abc}^{111} - R_{abc}^{221} \right)$$

$$\mathbf{B} \sin \alpha = - 2 \left( R_{abc}^{211} + R_{abc}^{121} \right)$$

Il suffit de calculer successivement  $R_a^1$ ,  $R_a^2$ ,  $R_{ab}^{11}$ ,  $R_{ab}^{12}$ ,  $R_{ab}^{21}$ ,  $R_{ab}^{22}$ ,  $R_{abc}^{111}$ ,  $R_{abc}^{121}$ ,  $R_{abc}^{211}$  et  $R_{abc}^{221}$

c) la contribution de l'onde (a, -b, c) est négligeable.

Alors :

$$\mathbf{B} \cos \alpha = 2 \left( R_{abc}^{111} - R_{abc}^{212} \right)$$

$$\mathbf{B} \sin \alpha = - 2 \left( R_{abc}^{211} + R_{abc}^{112} \right)$$

Il suffit de calculer successivement  $R_a^1$ ,  $R_a^2$ ,  $R_{ab}^{11}$ ,  $R_{ab}^{21}$ ,  $R_{abc}^{111}$ ,  $R_{abc}^{112}$ ,  $R_{abc}^{211}$  et  $R_{abc}^{212}$

## 2 - Application

En fait la période  $T_1$  de (s-h) n'est pas exactement 29 jours et la période  $T_2$  de h n'est pas exactement un multiple entier de  $T_1$  et il faut apporter des modifications au schéma de principe ci-dessus pour obtenir des résultats satisfaisants.

### 2.1 - Séparation des espèces

Les combinaisons journalières  $R_a^1$  et  $R_a^2$  sont remplacées par des combinaisons  $X_a$  et  $Y_a$  portant sur un peu plus d'une journée mais plus efficaces (Figure 1). Les coefficients des combinaisons  $X_a$  (Tableau 1) ont été déterminés par DOODSON pour éliminer au mieux les ondes prépondérantes des espèces  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L} \neq a$ . Les coefficients des combinaisons  $Y_a$  sont obtenus en remarquant que :

$$\sin \frac{2\pi am}{24} = \cos \left[ \frac{2\pi a}{24} \left( m - \frac{6}{a} \right) \right] \quad (a \neq 0)$$

$$\text{si } X_a(n) = \sum_{m=-M_1}^{M_2} d_m h \left( n + \frac{m}{24} \right)$$

alors on peut définir  $Y_a$  par :

$$Y_a(n) = \sum_{m=-M_1}^{M_2} d_m h \left( n + \frac{m}{24} + p_a \right) \quad \text{avec } p_a \approx \frac{6}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$\text{et } Y_0 = 0$$

Compte-tenu de la remarque a du § 1 il n'est pas nécessaire de calculer  $Y_3$  et  $Y_6$ . Pour le calcul de  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Y_4$ , DOODSON prend respectivement :  $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 3$  et  $p_4 = 2$ .

### 2.2 - Séparation des groupes

Les formules effectivement utilisées sont :

$$\begin{pmatrix} R_{ab}^{i1} \\ R_{ab}^{i2} \end{pmatrix} (m) = \frac{1}{29} \overset{28}{\underset{m_2=0}{/}} R_a^i(m T_1 + m_2) \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \left( \frac{2\pi b m_2}{T_1} \right), \quad b = 0, 1, \dots, 7$$

où  $m T_1$  est remplacé par le nombre entier de jours le plus proche. Pour faciliter les calculs, qui à l'époque se faisaient à la main, DOODSON remplace les cosinus et les sinus par la valeur 0,  $\pm 0,5$  ou  $\pm 1$  la plus proche et multiplie les deux membres par 2 lorsque  $b \neq 0$ .

### 2.3 - Séparation des sous-groupes

$$\begin{pmatrix} R_{abc}^{jrl} \\ R_{abc}^{jr2} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \sum_{m_3=0}^{11} R_{ab}^{jr(m_3)} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \left( \frac{2\pi c m_3 T_1}{T_2} \right), \quad c = 0, 1, 2, 3$$

Les sinus et cosinus sont remplacés par leur valeur approchée 0,  $\pm 0,5$  ou  $\pm 1$ .

Chaque combinaison  $R_{abc}^{jrs}$  contient outre la contribution du sous-groupe (a, b, c) des contributions des sous-groupes voisins qui ne sont pas toujours négligeables. La séparation est réalisée par approximations successives en remplaçant la quantité  $A e^{-i\alpha}$  relative aux ondes à éliminer par la combinaison  $F_{abc}$  correspondante pour le calcul des termes correctifs.

### 2.4 - Remarques

DOODSON préfère utiliser à la place des  $X_a$  et  $Y_a$  les quantités  $A_a = X_a + Y_a$  et  $B_a = X_a - Y_a$ . Ces expressions interviennent pour la détermination de  $A \cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$  et  $A \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$ .

Enfin, signalons qu'il choisit l'origine des temps à 0 h du jour milieu de la période d'observations, ce qui revient à utiliser les combinaisons suivantes :

$$\begin{pmatrix} R_{ab}^{jl} \\ R_{ab}^{j2} \end{pmatrix} (m) = \frac{1}{29} \sum_{m_2=-11}^{14} R_a^j \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right) T_1 + m_2 \right] \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \left( \frac{2\pi b m_2}{T_1} \right)$$

$$\begin{pmatrix} R_{abc}^{jrl} \\ R_{abc}^{jr2} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \sum_{m_3=-6}^{5} R_{ab}^{jr(m_3)} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \left( \frac{2\pi c m_3 T_1}{T_2} \right)$$

Tableau 1

Coefficients des combinaisons journalières de DOODSON

Filtre	Heure																							Jour	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22		23
X <sub>0</sub>	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	2	0	1	1	0	2	1	1	2	0	2	1	1	2	n
	0	1	1	0	2	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	n+1
X <sub>1</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	n-1
	0	-2	0	-1	0	-1	0	1	0	2	0	2	0	4	0	2	0	2	0	1	0	-1	0	-1	n
	0	-2	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	n+1
X <sub>2</sub>	1	0	2	0	1	0	-2	0	-4	0	-2	0	2	0	4	0	2	0	-2	0	-4	0	-2	0	n
	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	n+1
X <sub>3</sub>	1	0	0	0	-1	0	0	0	1	1	0	0	-2	-1	0	0	2	1	1	0	-2	-2	-1	0	n-1
	1	2	1	0	-1	-2	-2	0	1	1	2	0	0	-1	-2	0	0	1	1	0	0	0	-1	0	n
	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	n+1
X <sub>4</sub>	0	1	0	0	-1	0	0	2	0	0	-2	0	0	2	0	0	-2	0	0	2	0	0	-2	0	n
	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	n+1
X <sub>6</sub>	1	0	-1	0	2	0	-2	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0	n
	2	0	-2	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	n+1

FIGURE 1

