

85-750
L/1317.2C 1 MARÉE
SERVICE HYDROGRAPHIQUE ET OCÉANOGRAPHIQUE DE LA MARINE

285

L/1347.2C

1
Marée

MARÉES

FASCICULE 2

Chapitres IX à XV

G. BESSERO

Ingénieur Principal de l'Armement

1985

Toute correspondance relative à ce fascicule doit être adressée à :

ÉTABLISSEMENT PRINCIPAL
DU SERVICE HYDROGRAPHIQUE ET OCÉANOGRAPHIQUE
DE LA MARINE

B.P. 426. — 29275 BREST CEDEX

CHAPITRE IX

Méthodes d'analyse non harmoniques

1. Généralités

Les méthodes d'analyse non harmoniques n'utilisent pas le développement a priori de la marée en une somme de termes périodiques de périodes déterminées. On peut distinguer deux catégories de méthodes.

La première repose sur la recherche de relations empiriques entre la marée et divers paramètres dont la connaissance permet alors la prédiction de la marée. Les méthodes d'analyse développées par Lubbock à partir de 1831 en Angleterre étaient de ce type : les éléments principaux de la marée, c'est-à-dire les heures et hauteurs des pleines et basses mers, étaient rattachés à des quantités astronomiques observables, comme l'âge de la Lune. On utilise encore couramment la méthode des concordances qui consiste à rattacher la marée observée en un point à la marée observée en un autre point, appelé port de référence. On peut alors prédire facilement la marée au premier point lorsque la marée du port de référence est connue.

La seconde fait appel, comme la méthode harmonique, à une formulation théorique du problème des marées permettant d'établir des équations d'observation dont la résolution fournit les valeurs des inconnues. La méthode de Laplace et la méthode plus récente de réponse sont deux exemples appartenant à cette catégorie. La méthode de Laplace consiste à déduire d'observations appropriées les valeurs des constantes de la formule de Laplace, dites constantes non harmoniques. Dans la méthode de réponse, on considère la marée comme la réponse du système océan à diverses excitations et on cherche à déterminer, par l'analyse des observations, la fonction de transfert de ce système. Cette méthode permet de prendre en compte des variations du niveau de l'eau qui ne sont pas d'origine astronomique.

2. La méthode des concordances

2.1. Définition de la concordance

On dit qu'il y a concordance entre les marées de deux ports a et b si chacun des éléments de la marée d'un de ces ports dépend uniquement de l'élément correspondant de la marée de l'autre port. Connaissant la marée du port a, appelé port de référence, on peut alors déterminer très simplement la marée du port b.

Cette notion s'est introduite naturellement par la comparaison des marées de ports voisins. On constate, en effet que le régime de la marée varie en général d'une façon suffisamment lente le long d'une côte pour que les marées en deux points voisins conservent pratiquement le même caractère. La proximité géographique n'est pas indispensable mais il n'y a généralement pas concordance entre les marées de deux ports pris au hasard sur le globe. Il faut au moins que les marées soient de même type.

2.2. Conditions de concordance

2.2.1. Application de la formule de Laplace

Les conditions de concordance entre deux ports peuvent être précisées dans le cas général de la marée semi-diurne (marée des côtes de France par exemple) à partir de la formule de Laplace.

a) concordance en heure

L'heure t^a de la pleine mer en un point a est reliée à l'heure t_1^a de passage de la Lune au méridien de a par les relations :

$$t^a = t_1^a + \frac{30}{29} (\mu_{21}^a + p_{21}^a)$$

$$p_{21}^a = \frac{1}{2} \text{Arc tg } \frac{\sin 2(\alpha_2^a - \omega^a)}{\frac{29}{30} \frac{A_{21}^a}{A_{22}^a} + \cos 2(\alpha_2^a - \omega^a)}$$

$$\omega^a = AH_2^a(t^a) - AH_1^a(t^a)$$

où les notations sont celles du chapitre V (voir § 3.4.2.)

Comme : $AH_1^a(t_1^a) = 0$ par définition,

$$t_1^a = t^a - AH_1^a(t^a) \frac{dt}{dAH_1} \quad (1)$$

$$\omega^a = AH_2^a(t_1^a) + (t^a - t_1^a) \frac{d\omega}{dt}$$

or $\frac{d\omega}{dt} \simeq 0,5^\circ/\text{heure}$

et, lorsque p_1 reste voisin de l'heure, ce qui est le cas le long des côtes de France, on peut négliger la quantité $p_{21} \frac{d\omega}{dt}$ et écrire :

$$\omega^a \simeq AH_2^a(t_1^a) + \epsilon^a$$

où ϵ^a est une constante pour un lieu a donné :

$$\epsilon^a = \frac{30}{29} \mu_{21}^a \frac{d\omega}{dt}$$

Pour un second point b, on a des relations analogues :

$$t^b = t_1^b + \frac{30}{29} (\mu_{21}^b + p_{21}^b) \quad (2)$$

.../...

$$p_{21}^b = \frac{1}{2} \text{Arc tg} \frac{\sin 2 (\alpha_2^b - \omega^b)}{\frac{29}{30} \frac{A_{21}^b}{A_{22}^b} + \cos 2 (\alpha_2^b - \omega^b)} \quad (3)$$

$$\omega^b \simeq AH_2^b (t_1^b) + \epsilon^b \quad (4)$$

$$\text{or} \quad AH_1^b (t) + G^b = AH_1^a (t) + G^a$$

où G^a et G^b sont les longitudes de a et b, comptées positivement vers l'Ouest.

$$\text{Comme } AH_1^b (t_1^b) = 0$$

$$\text{il vient : } G^b = AH_1^a (t_1^b) + G^a$$

$$G^b = (t_1^b - t_1^a) \frac{d AH_1}{dt} + G^a$$

$$\text{soit} \quad t_1^b = t_1^a + (G^b - G^a) \frac{dt}{d AH_1} \quad (5)$$

Fixons l'heure t_1^a de la pleine mer en a. On peut calculer successivement t_1^a par la relation (1), t_1^b par la relation (5) et ω^b par la relation (4).

Si on néglige les variations du rapport $\frac{A_{21}^b}{A_{22}^b}$ autour de sa valeur moyenne,

p_1^b est alors déterminé par la relation (3), ce qui fixe la valeur t_o^b de l'heure de la pleine mer correspondante en b :

$$t_o^b = F (t^a)$$

Le même raisonnement s'applique aux heures des basses mers. Il y a concordance en heure entre les marées des points a et b lorsque

p_{21}^a et p_{21}^b restent voisins de l'heure et lorsque les variations des rapports $\frac{A_{21}^a}{A_{22}^a}$ et $\frac{A_{21}^b}{A_{22}^b}$ sont négligeables.

b) Concordance en hauteur

La hauteur h^a d'une pleine mer en a, comptée au-dessus du niveau de mi-marée, peut se mettre sous la forme :

$$h^a = C^a U^a \quad (6) \quad (\text{voir chapitre V, § 3.4.4})$$

où C^a et U^a sont respectivement le coefficient et l'unité de hauteur de la marée en a.

.../...

C^a est une fonction de ω^a et du rapport $\frac{A_{21}^a}{A_{22}^a}$

La hauteur h^b de la pleine mer correspondante en b est donnée par une relation similaire :

$$h^b = C^b U^b \quad (7)$$

avec $C^b = C^b \left(\frac{A_{21}^b}{A_{22}^b}, \omega^b \right)$

or, d'après ce que nous avons vu pour la concordance en heure :

$$\begin{aligned} \omega^b &= \omega^a + \epsilon^b - \epsilon^a + (t_1^b - t_1^a) \frac{d AH_2}{dt} \\ \omega^b &= \omega^a + \epsilon^b - \epsilon^a + (G^b - G^a) \frac{d AH_2}{d AH_1} \end{aligned} \quad (8)$$

Supposons que les variations des rapports $\frac{A_{21}^a}{A_{22}^a}$ et $\frac{A_{21}^b}{A_{22}^b}$ soient négligeables,

h^a étant fixé, on peut calculer C^a par la relation (6), ce qui fixe ω^a . La relation (8) permet d'en déduire ω^b d'où C^b et h_o^b par la relation (7) :

$$h_o^b = G(h^a)$$

Le même raisonnement s'applique aux basses mers : il y a concordance en hauteur entre les marées des points a et b dans les mêmes conditions que pour la concordance en heure.

En fait, les variations des rapports $\frac{A_{21}}{A_{22}}$ et surtout les irrégularités du mouvement des astres - en particulier les variations des quantités $\frac{d AH_1}{dt}$ et $\frac{d \omega}{dt}$ - se traduisent par une dispersion des heures et hauteurs des pleines ou basses mers en b autour des valeurs t_o^b et h_o^b . L'existence d'ondes diurnes, tiers-diurnes, etc. introduit aussi une dispersion supplémentaire.

2.2.2. Application de la formule harmonique

Les hauteurs d'eau dues à la marée aux points a et b peuvent se mettre sous la forme :

$$h^a(t) = H_o^a + \sum_{j=1}^N H_j^a \cos(q_j t + V_{o,j} - g_j^a)$$

.../...

$$h^b(t) = H_o^b + \sum_{j=1}^N H_j^b \cos(q_j t + v_{oj} - g_j^b)$$

Les relations de concordance entre les marées en a et b se définissent très facilement lorsque ces marées sont semblables, c'est-à-dire si :

$$\frac{H_j^b}{H_j^a} = k \quad j = 1, \dots, N \quad (9)$$

$$\frac{g_j^a - g_j^b}{q_j} = \theta \quad j = 1, \dots, N \quad (10)$$

alors :

$$h^b(t) = H_o^b + k \sum_{j=1}^N H_j^a \cos(q_j(t + \theta) + v_{oj} - g_j^a)$$

$$h^b(t) = k h^a(t + \theta) + (H_o^b - k H_o^a)$$

Les heures et hauteurs des pleines et basses mers en a et b sont liées par des relations linéaires :

$$h^b = k h^a + c$$

$$t^b = t^a - \theta$$

Les conditions (9) et (10) ne sont pas nécessaires pour qu'il y ait concordance mais, l'étude théorique des pleines et basses mers à partir de la formule harmonique étant difficilement praticable, on ne peut pas donner de conditions de concordance dans le cas général. Pratiquement, on considèrera qu'il y a concordance lorsque les relations (9) et (10) sont vérifiées pour les ondes principales. Cela suppose, en particulier, que les marées en a et b soient de même type.

2.3. Etude de la concordance entre les pleines ou basses mers

2.3.1. Principe

En pratique on se préoccupe rarement de rechercher si les conditions théoriques de concordance sont satisfaites. La possibilité d'une concordance entre les marées en deux points est déterminée empiriquement par comparaison des heures et hauteurs des pleines et basses mers aux deux points. Ces éléments sont soit observés directement soit déduits des observations horaires par interpolation. La comparaison est généralement faite à l'aide de graphiques qui fournissent en outre les relations de concordance éventuelles. Ces relations peuvent ensuite être exprimées à l'aide de tableaux.

Le critère de choix des pleines ou basses mers correspondantes aux deux points est évident dans le cas de points voisins ou entre lesquels la propagation de la marée est connue. Dans le cas de points éloignés, il peut y avoir ambiguïté : on retiendra le critère qui donne la meilleure (ou la moins mauvaise) concordance.

La concordance devra porter sur au moins quinze jours d'observations pour être significative.

Les variations accidentelles du niveau de la mer sont un facteur de dispersion. Pour les éliminer en partie on utilisera, à la place des hauteurs observées, des hauteurs réduites définies de la façon suivante :

soit $h(t)$ la hauteur observée à l'instant t ,

N_o le niveau moyen au point considéré (supposé connu),

$N(t)$ le niveau moyen journalier à l'instant t (voir chapitre XIII) ;

la hauteur réduite $h_r(t)$ est :

$$h_r(t) = h(t) + N_o - N(t)$$

On élimine ainsi toutes les oscillations de périodes supérieures au jour, y compris une dérive éventuelle du marégraphe et les composantes à longues périodes de la marée. On peut réintroduire ces dernières, si on connaît leurs constantes harmoniques, et déterminer des hauteurs réduites corrigées

$$h_{rc}(t) = h_r(t) + \sum_{\substack{\text{ondes à} \\ \text{longues périodes}}} H_i \cos(q_i t + V_{oi} - g_i)$$

Lorsque la marée du port de référence peut faire l'objet d'une prédiction précise, on aura intérêt à étudier la concordance entre la marée prédite du port de référence et la marée réduite corrigée du port secondaire. Si on ne tient pas compte des ondes à longues périodes pour la prédiction, on comparera la marée prédite du port de référence et la marée réduite du port secondaire.

2.3.2. Concordance en hauteur

On porte sur un graphique, pour chaque pleine et basse mer, un point ayant pour abscisse la hauteur au port de référence et pour ordonnée la hauteur correspondante dans l'autre port. Lorsqu'il y a effectivement concordance les points obtenus se regroupent à l'intérieur de deux zones allongées, à peu près dans le prolongement l'une de l'autre et séparées par un vide autour du niveau moyen (fig. 1). On admet qu'il y a concordance lorsque l'écart des ordonnées des points de même abscisse ne dépasse pas 30 à 40 cm. La courbe de concordance est la courbe passant au mieux à travers le nuage de points. Lorsqu'il y a un nombre élevé d'observations, on a intérêt à dégros-

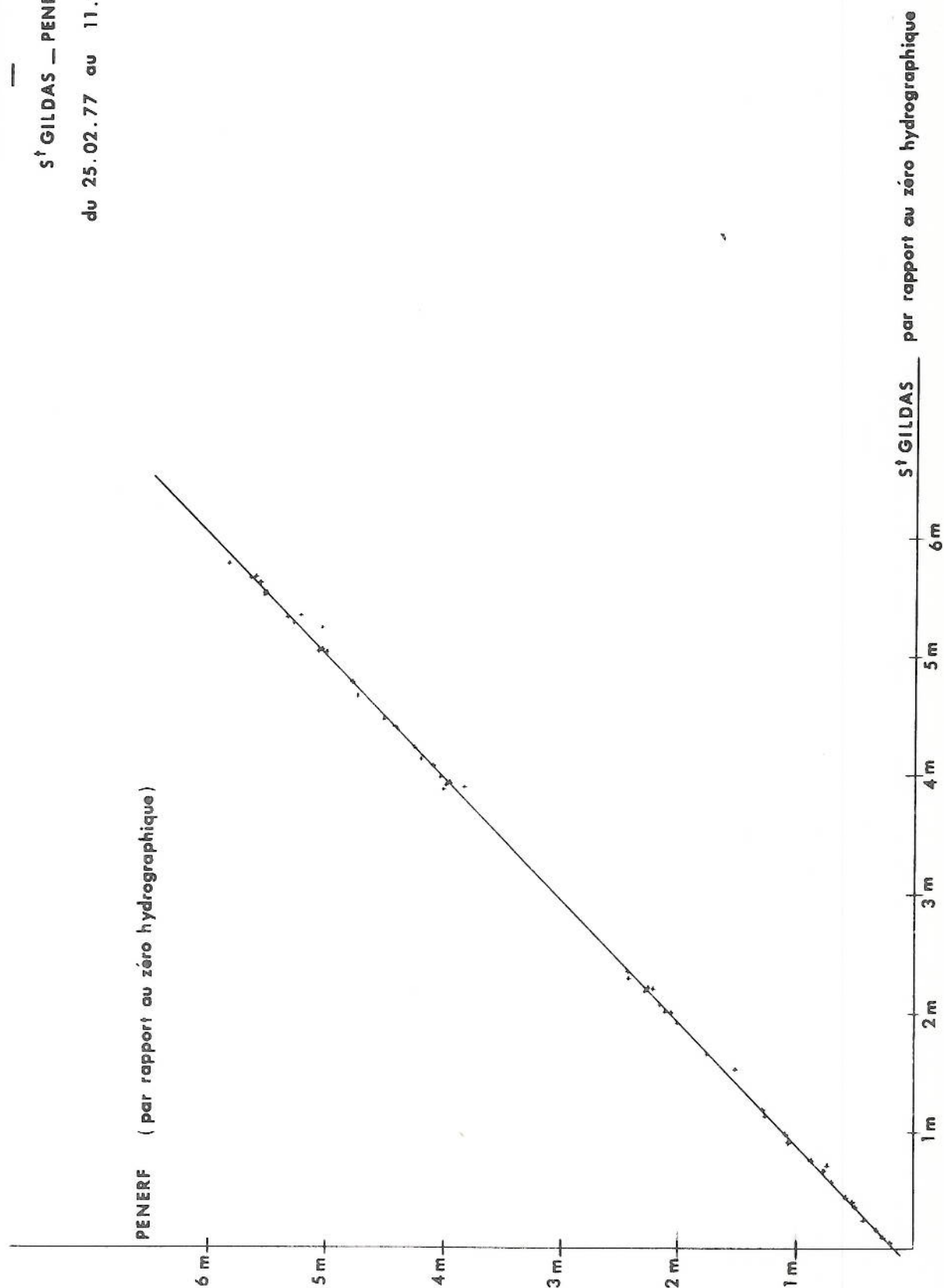
.../...

Figure 1

CONCORDANCE

S^t GILDAS — PENERF

du 25.02.77 au 11.03.77



sir le tracé en calculant un point moyen par tranche de 20 à 25 cm de hauteur au port de référence. Ce point a pour abscisse la hauteur moyenne de la tranche et pour ordonnée la moyenne des hauteurs correspondantes au port à rattacher. On pourra traiter séparément les pleines et basses mers (figure 2-1).

Plus les ports sont voisins, plus la concordance est rigoureuse et plus la courbe de concordance se rapproche d'une droite ou de deux segments de droite faisant entre eux un angle faible et correspondant aux pleines mers d'une part aux basses mers d'autre part.

Dans le cas des ports à forte inégalité diurne, il peut y avoir recouvrement des zones relatives aux pleines et basses mers, lorsque des pleines inférieures ont des hauteurs plus faibles que certaines basses mers supérieures. La concordance sera plus ou moins satisfaisante selon que la zone commune peut être plus ou moins bien représentée par une courbe unique.

C'est surtout la variation du rapport de la marée diurne à la marée semi-diurne qui contribue à élargir la zone de dispersion et amène à renoncer à définir une concordance.

2.3.3. Concordance en heure

On établit deux graphiques séparés, un pour les pleines mers et un pour les basses mers (Fig 2-2).

On porte en abscisse les heures au port de référence comptées de 0 à 12 h si la marée est semi-diurne, de 0 à 24 h dans les autres cas. On porte habituellement en ordonnées les écarts entre les heures des pleines (ou basses) mers correspondantes au port de référence et au port à rattacher. La dispersion est en général plus grande que pour les hauteurs, l'heure d'un extremum étant moins bien définie que sa hauteur, en particulier au voisinage des mortes-eaux.

Pour tracer la courbe de concordance, il faut prendre soin que les deux extrémités à 0 h et à 12 h (ou 24 h) se raccordent en ordonnée et en pente.

La comparaison de ports à forte inégalité diurne, même relativement voisins, donne souvent de mauvais résultats. Il en est de même pour les ports à marée diurne puisque la pleine mer de vive eau diurne avance d'environ une heure d'une vive eau à la suivante au lieu de se produire à la même heure comme pour la marée semi-diurne.

2.4. Analyse des courbes de marée par concordance

2.4.1. Principe

Lorsqu'il existe une concordance entre les pleines et basses mers en deux points a et b, on peut l'étendre à l'ensemble de la courbe de marée en associant à une hauteur de pleine (ou de basse) mer donnée dans le port de référence une portion de courbe de marée unique, limitée aux basses (ou

.../...

Figures 2

CONCORDANCE BREST - CALAIS

CONCORDANCE ENTRE HAUTEURS DE P.M.

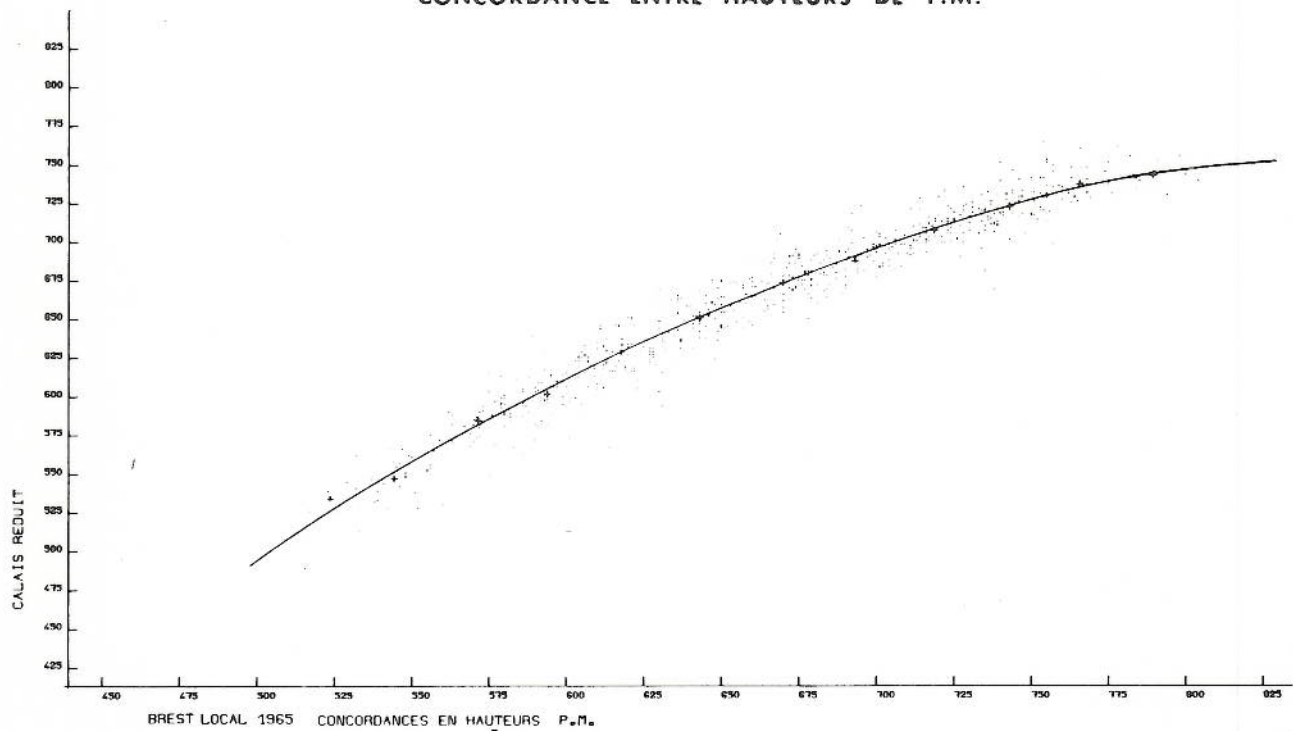


Fig. 2_1

CONCORDANCE ENTRE HEURES DE P.M.

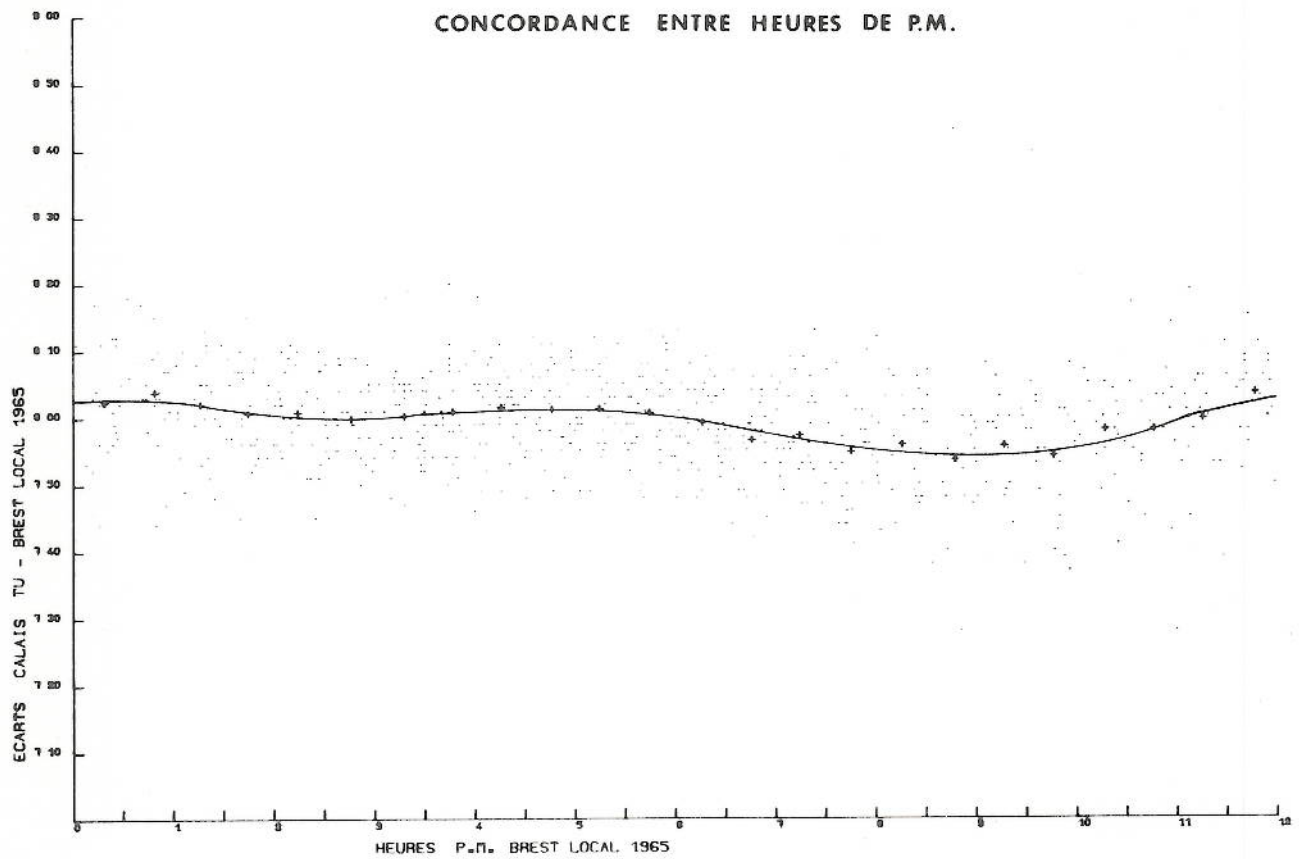


Fig. 2_2

pleines) mers voisines, dans le port secondaire b. Cette concordance sera d'autant mieux vérifiée que les marées en a et b seront plus proches de la similitude. En particulier, cette notion est bien adaptée au cas de la marée semi-diurne des côtes de France. Elle est à la base de l'établissement d'une "Table permanente des hauteurs d'eau" publiée par le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (voir chapitre XI.)

2.4.2. Définition des hauteurs relatives

Les variations du niveau de la mer dues aux conditions météorologiques introduisent une dispersion importante dans la correspondance entre les éléments de la marée observée en a et b. On diminue considérablement cet effet dispersif si on substitue au calage absolu des hauteurs observées en b un calage relatif par rapport à la pleine mer (ou basse mer) voisine. On s'affranchit alors des décotes ou surcotes qui affectent en général globalement une portion de courbe de marée sur un intervalle de quelques heures à un jour et plus. On utilisera en outre, à la place des hauteurs observées en a, les hauteurs réduites (voir § 2.3.1.) ou prédites.

Sur une portion de courbe de marée du port b, considérons une basse mer particulière et relevons les hauteurs d'eau h aux heures (B.M. + i heures). On appelle hauteur relative rapportée à la basse mer la quantité e_i :

$$e_i = h(\text{BM} + i \text{ heures}) - h(\text{BM})$$

Pratiquement, on fait varier i entre - 8 et + 8.

On définit de même les hauteurs relatives d_i rapportées à une pleine mer :

$$d_i = h(\text{PM}) - h(\text{PM} + i \text{ heures})$$

Lorsqu'on utilise des hauteurs horaires, les hauteurs $h(\text{PM} + i \text{ heures})$ sont calculées par interpolation parabolique entre trois hauteurs horaires consécutives.

2.4.3. Détermination des courbes types

Considérons une basse mer particulière en a de hauteur h^a . On associe à cette basse mer les hauteurs relatives e_i rapportées à la basse mer correspondante en b. L'ensemble des points de coordonnées e_i et h^a , à i fixé, sont portés sur un graphique, ce qui permet de définir une courbe de concordance C_i (Fig. 3) passant au mieux à travers le nuage de points. En dépouillant les courbes C_i ainsi obtenues, on détermine la courbe type relative associée à une hauteur donnée de basse mer en a, rapportée à la basse mer en b (Fig. 4).

On procède de la même façon pour définir les courbes types relatives rapportées à la pleine mer en b.

A la hauteur h^a de pleine mer (basse mer) au port a, la concordance définie au § 2.3. fait correspondre une hauteur h^b de pleine mer (basse mer) au port b. Il suffit de retrancher (d'ajouter) à h^b les hauteurs relatives d_i (e_i) pour obtenir la courbe type absolue correspondante.

Ces courbes types peuvent être tabulées, ce qui fournit un moyen commode de prédiction de la marée en b à partir de la seule connaissance des heures et hauteurs de pleines mers (basses mers) en a (voir chapitre XI).

COURBES (C_1) DE HAUTEURS RELATIVES A CALAIS **REFERENCE BASSE MER**

(En ordonnée les hauteurs de B.M. prédites à Brest)

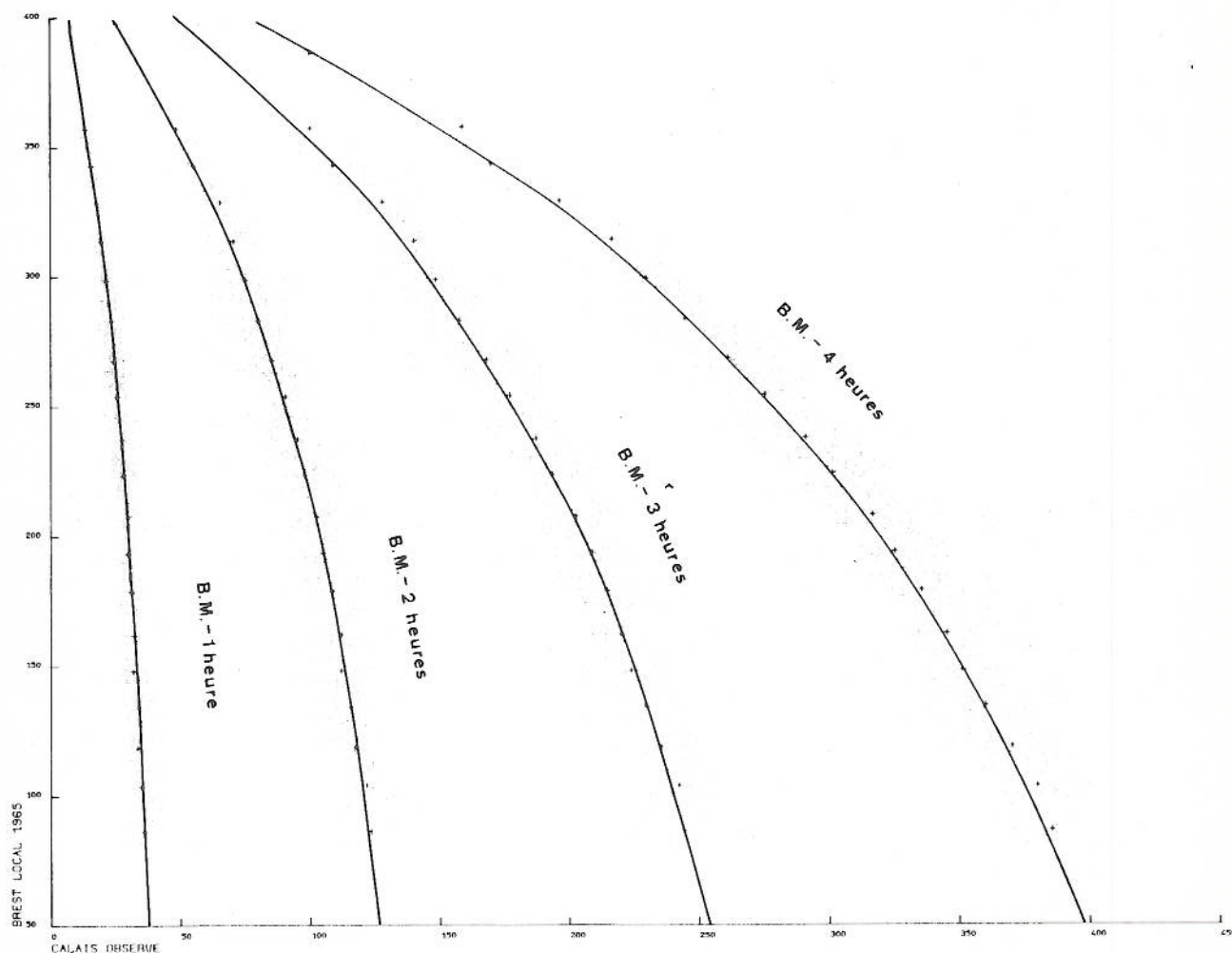
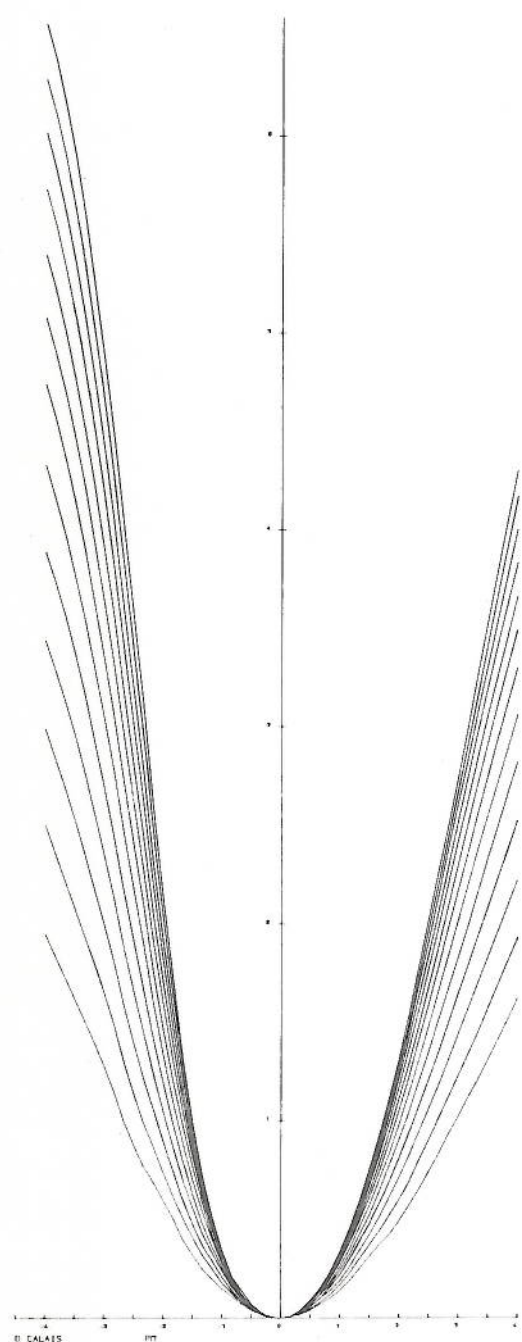
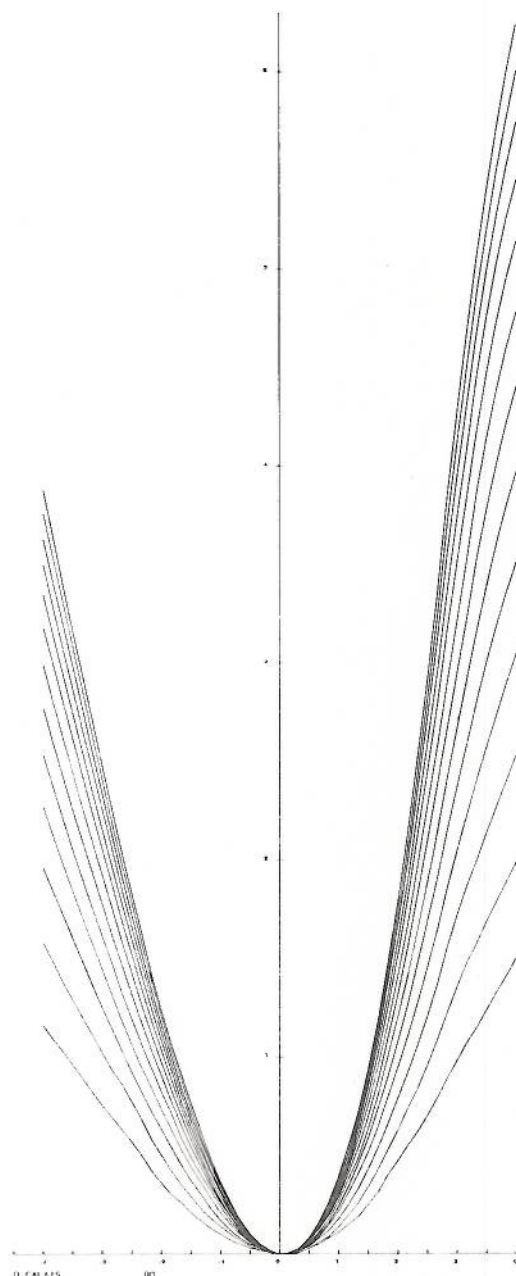


Figure 3

COURBES TYPES DE HAUTEURS RELATIVES A CALAIS



Courbes rapportées à la PM CALAIS
(hauteurs relatives d)



Courbes rapportées à la BM CALAIS
(hauteurs relatives θ)

Figure 4

3 - Méthode de Laplace

3.1- Cas général

Rappelons la formule de Laplace (voir chapitre V)

$$h(t) = B_{01} i_1^3(t) (\sin^2 \delta_1(t) - 1/3) + B_{02} i_2^3(t) (\sin^2 \delta_2(t) - 1/3) \\ + B_{11} i_1^3(t-T_1) \sin 2\delta_1(t-T_1) \cos(AH_1(t-T_1) - \lambda_1) + B_{12} i_2^3(t-T_1) \sin 2\delta_2(t-T_1) \cos(AH_2(t-T_1) - \lambda_1) \\ + B_{21} i_1^3(t-T_2) \cos^2 \delta_1(t-T_2) \cos 2(AH_1(t-T_2) - \lambda_2) + B_{22} i_2^3(t-T_2) \cos^2 \delta_2(t-T_2) \cos 2(AH_2(t-T_2) - \lambda_2)$$

Elle fait intervenir les dix constantes non harmoniques : $T_1, T_2, \lambda_1, \lambda_2,$

$B_{01}, B_{02}, B_{11}, B_{12}, B_{21}$ et B_{22} . Chaque hauteur observée donne lieu, après calcul des éléments astronomiques, à une équation d'observation qui peut être linéarisée par le procédé itératif suivant :

Soit $T_{\ell 0}$ une valeur approchée de T_{ℓ} ($\ell = 1, 2$)

On fait les approximations suivantes ($\ell = 1, 2$ et $p = 1, 2$)

$$\left\{ \begin{array}{l} i_p(t-T_{\ell}) \simeq i_p(t-T_{\ell 0}) \\ \delta_p(t-T_{\ell}) \simeq \delta_p(t-T_{\ell 0}) \\ AH_p(t-T_{\ell}) \simeq AH_p(t-T_{\ell 0}) - (T - T_{\ell 0}) \frac{dAH_p}{dt} \\ \frac{dAH_p}{dt} \simeq \text{valeur moyenne de } \left(\frac{dAH_p}{dt} \right) \end{array} \right.$$

et on introduit les nouvelles inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\ell p} = \lambda_{\ell} + (T - T_{\ell 0}) \frac{dAH_p}{dt} \\ C_{\ell p} = B_{\ell p} \cos \mu_{\ell p} \\ S_{\ell p} = B_{\ell p} \sin \mu_{\ell p} \end{array} \right.$$

qui permettent d'obtenir une équation linéaire en fonction des inconnues $B_{01}, B_{02}, C_{11}, C_{12}, S_{11}, S_{12}, C_{21}, C_{22}, S_{21}, S_{22}$.

La résolution du système linéarisé, par la méthode des moindres carrés, fournit la valeur des inconnues. Les résultats étant assez peu sensibles aux valeurs de T_1 et T_2 , deux itérations à partir de $T_{10} = T_{20} = 0$ devraient suffire.

Cette méthode, très alourdie par la nécessité de calculer les éléments astronomiques, n'a en fait jamais été appliquée. Seule la marée à Brest a fait l'objet d'une application directe de la formule de Laplace ; la prédominance des termes semi-diurnes permet alors d'utiliser une méthode plus simple.

3.2 - Cas d'une marée semi-diurne prédominante

L'analyse porte sur les heures et hauteurs des pleines et basses mers. Au cours d'une journée lunaire on observe deux pleines mers de hauteurs h_0 et h_2 aux instants t_0 et t_2 et deux basses mers de hauteurs h_1 et h_3 aux instants t_1 et t_3 , les passages de la Lune au méridien du lieu ayant lieu aux instant θ_0 et θ_2 .

Les formules obtenues au chapitre V (voir § 3.6.) permettent de séparer facilement les termes à longue période, diurnes et semi-diurnes. La contribution des termes à longue période est donnée par :

$$y_0 = \frac{1}{4}(h_0 + h_1 + h_2 + h_3) \text{ pour l'instant } t = \frac{1}{4}(t_0 + t_1 + t_2 + t_3)$$

ce qui fournit une relation linéaire entre B_{01} et B_{02} dont la détermination est alors facile.

Les caractéristiques de la marée diurne sont :

$$\begin{aligned} \text{amplitude : } y_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{(h_0 - h_2)^2 + (h_3 - h_1)^2} \\ \text{déphasage par rapport à la marée semi-diurne } \gamma &= \text{Arc tg } \frac{h_3 - h_1}{h_0 - h_2} \end{aligned} \quad \text{à l'instant } t = \frac{1}{4}(t_0 + t_1 + t_2 + t_3)$$

L'amplitude de la marée semi-diurne est obtenue par :

$$y_2 = \frac{1}{2} (h_0 + h_2) \text{ pour } t = \frac{1}{2} (t_0 + t_2)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} (h_1 + h_3) \text{ pour } t = \frac{1}{2} (t_1 + t_3)$$

Ces formules sont approchées et il convient de les appliquer à un grand nombre d'observations pour éliminer au moins partiellement leurs imperfections. Chacune des trois séries ainsi obtenues peut être assimilée aux valeurs discrètes d'une fonction continue du temps dont l'étude va permettre de déterminer les constantes des marées diurnes et semi-diurnes.

La détermination des extrémums de $y_2(t)$ (par interpolation parabolique par exemple) fournit les quantités $(B_{21} i_1^3 \cos^2 \int_1 + B_{22} i_2^3 \cos^2 \int_2)$ et $(B_{21} i_1^3 \cos^2 \int_1 - B_{22} i_2^3 \cos^2 \int_2)$ à des instants t_M et t_m voisins des instants des syzygies t_S et des quadratures t_Q . On en déduit facilement les ampli-

tudes B_{21} et B_{22} ainsi que l'âge de la marée semi-diurne T_2 qui est

la moyenne des différences $(t_M - t_S)$ et $(t_m - t_Q)$ (voir chapitre V, § 3.4.4)

La moyenne des retards des pleines mers sur les passages de la Lune au méridien $(t_0 - \theta_0)$ et $t_2 - \theta_2$ pour les vives-eaux et les mortes-eaux

fournit l'établissement moyen $\frac{30}{29}\mu_{21}$, d'où λ_2 , puisque T_2 est connu :

$$\lambda_2 = \mu_{21} - T_2 \frac{dA_{H_1}}{dt}$$

Les constantes non harmoniques de la marée semi-diurne sont ainsi déterminées.

La valeur moyenne de δ permet de calculer μ_{11} :

$$\mu_{11} = \mu_{21} - \delta$$

La moyenne des retards entre les extrémums de y_1 et les passages correspondants de la Lune par ses tropiques et par le plan de l'équateur est égal à l'âge de la marée diurnes T_1 .

On en déduit λ_1 et α_1 :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_{11} - T_1 \frac{dA_{H_1}}{dt} \\ \alpha_1 = T_1 \frac{d\omega}{dt} \end{cases}$$

Pour la détermination des amplitudes des termes diurnes, B_{11} et B_{12} , le plus commode est d'établir pour une série de pleines et basses mers, par exemple en vive eau, la différence entre la hauteur observée et les termes à longue période et semi-diurnes. On obtient ainsi un système d'équations linéaires dont la résolution fournit B_{11} et B_{12} .

Des méthodes d'analyses similaires ont été appliquées par Laplace puis Chazallon à la marée de Brest.

4. La méthode de réponse (ou méthode de convolution)

4.1 - Principe

Dans l'analyse harmonique des observations de marée, le spectre de la marée est assimilé à un spectre de raies centrées à des fréquences connues et on recherche uniquement les contributions de ces fréquences. Il s'agit en fait d'une approximation car on néglige ainsi le "bruit", d'origine météorologique essentiellement, qui présente lui un spectre continu que les méthodes d'analyse décrites jusqu'ici éliminent plus ou moins.

La méthode de réponse, développée par MUNK et CARTWRIGHT à partir de 1965, considère le spectre continu de la marée observée dans son ensemble. La hauteur d'eau $h(t)$ est reliée à une fonction $U(t)$, représentant les causes physiques des variations de h , par des intégrales de convolution :

$$\begin{aligned}
 h(t) = & \int_{-\infty}^{+\infty} w_1(\tau) U(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(\tau, \tau') U(t-\tau) U(t-\tau') d\tau d\tau' \\
 & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w_3(\tau, \tau', \tau'') U(t-\tau) U(t-\tau') U(t-\tau'') d\tau d\tau' d\tau'' \\
 & + \dots \dots \dots
 \end{aligned} \quad (11)$$

où les fonctions w_1 , w_2 , w_3 , etc sont caractéristiques du point considéré.

$h(t)$ est la réponse du système océan à l'excitation $U(t)$. La première intégrale de (11) représente les termes linéaires de cette réponse ; les suivantes permettent la prise en compte des non-linéarités.

$U(t)$ comprend en particulier le potentiel générateur de la marée mais l'application de la relation (11) ne nécessite ni le recours à un développement harmonique de ce dernier ni le choix préalable des fréquences à rechercher dans l'enregistrement de h disponible. La totalité du potentiel est automatiquement prise en compte, y compris les corrections nodales.

D'autres causes de variation du niveau de la mer peuvent être représentées dans U , telles que la pression atmosphérique, le vent ou le rayonnement solaire. Ceci permet une analyse plus complète des observations, mais avec, comme contre partie, une complexité plus grande des calculs que pour l'analyse harmonique.

Cette méthode constitue en quelque sorte une généralisation de la méthode de Laplace avec la suppression des hypothèses restrictives qui ont permis à Laplace d'obtenir une expression a priori de la marée dans l'approximation linéaire, c'est-à-dire la forme de la fonction w_1 .

Notons enfin que par cette méthode, l'analyse des observations de marée conduit à un problème d'interprétation physique des fonction w_i . Il peut être alors commode de considérer les transformées de Fourier des w_i .

$$W_1(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_1(\tau) e^{-2i\pi p\tau} d\tau$$

$$W_2(p, p') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w_2(\tau, \tau') e^{-2i\pi p\tau} e^{-2i\pi p'\tau'} d\tau d\tau'$$

etc.

Les W_i sont encore appelées admittances.

Pour les calculs effectifs, la relation (11) est discrétisée sous la forme :

$$h(t) = \sum_{s_1=-\infty}^{+\infty} w_1(\tau_{s_1}) U(t-\tau_{s_1}) + \sum_{s_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{+\infty} w_2(\tau_{s_1}, \tau_{s_2}) U(t-\tau_{s_1}) U(t-\tau_{s_2}) + \dots \quad (12)$$

et les admittances sont calculées à l'aide d'expressions du type :

$$W_1(p) = \sum_{s_1=-\infty}^{+\infty} w_1(\tau_{s_1}) e^{-2i\pi p\tau_{s_1}}$$

On admet que les fonctions w_i s'annulent lorsqu'un des arguments $\tau_{s,j}$ ($j \leq i$) devient suffisamment grand, ce qui permet de ne considérer que des sommes finies.

4.2. Détermination de la fonction d'entrée

L'utilisation de la formule (12) suppose la connaissance de la fonction $U(t)$. MUNK et CARTWRIGHT font intervenir dans U d'une part le potentiel générateur de la marée et d'autre part le rayonnement solaire. Ces deux quantités sont calculées à l'aide d'un développement en harmoniques sphériques.

4.2.1. Potentiel générateur de la marée

Le potentiel générateur de la marée due à un astre se met sous la forme (voir chapitre III) :

$$V = \frac{km}{r} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\cos \theta)$$

avec k constante universelle de la gravitation

m masse de l'astre

r distance de l'astre au centre de la Terre

a rayon de la Terre

θ distance zénithale géocentrique de l'astre

P_n polynôme de Legendre.

En introduisant les coordonnées horaires de l'astre, déclinaison δ et angle horaire AH , on peut écrire :

.../...

$$\cos \theta = \sin L \sin \delta + \cos L \cos \delta \cos AH$$

où L est la latitude du lieu.

Si AH_0 est l'angle horaire de l'astre compté depuis le méridien origine et G la longitude du lieu comptée positivement vers l'Ouest, on a :

$$AH + G = AH_0$$

ce qui permet de développer P_n sous la forme :

$$P_n(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_{nm}^*(\delta, AH_0) Y_{nm}(L, G)$$

avec Y_{nm}^* complexe conjugué de Y_{nm} et :

$$Y_{nm}(L, G) = (-1)^m \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right)^{1/2} P_{nm}(\sin L) e^{-imG}$$

où les P_{nm} sont les fonctions de Legendre associées de lère espèce :

$$P_{nm}(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n ; n \geq 0, |m| \leq n$$

Ceci permet d'écrire V sous la forme :

$$V(L, G, t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} d_{nm}(t) Y_{nm}(L, G)$$

avec

$$d_{nm}(t) = \frac{km}{r} \left(\frac{a}{r} \right)^n \frac{4\pi}{2n+1} Y_{nm}^*(\delta, AH_0)$$

Les quantités d_{nm} ne dépendent plus du lieu d'observations. Elles font intervenir les expressions de r, δ et AH_0 en fonction du temps. Ces expressions sont déterminées à partir des lois de la mécanique céleste. Compte tenu de la décroissance rapide de $\left(\frac{a}{r}\right)^n$ avec n, on se limite à $n \leq 3$, ce qui suppose le calcul des quantités d_{21} , d_{22} , d_{31} , d_{32} et d_{33} . Notons, en effet, que :

$$Y_{n(-m)} = (-1)^m Y_{nm}^*$$

$$\text{soit } d_{n(-m)} = (-1)^m d_{nm}^*$$

.../...

4 .2.2. Rayonnement solaire

Soit S la quantité de chaleur reçue par une surface unité située à la distance r_0 du Soleil et normale à la direction du Soleil, pendant l'unité de temps ($S = 1,36 \text{ k W/m}^2$). La terre étant opaque au rayonnement, la quantité de chaleur reçue pendant l'unité de temps par l'unité de surface horizontale en M est (Figure 5) :

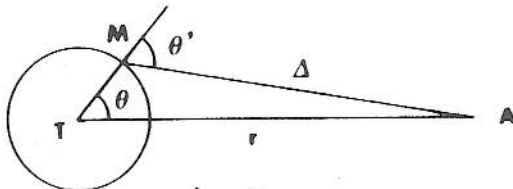


Figure 5

$$R = \begin{cases} S \frac{r_0}{\Delta} \cos \theta' & 0 \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \pi \end{cases}$$

Comme r est très grand devant a , on a $\theta' \simeq \theta$. D'autre part, en développant $\frac{1}{\Delta}$ en série entière en $\frac{a}{r}$ (voir chapitre III), on obtient :

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\cos \theta)$$

d'où

$$R \simeq \begin{cases} S \frac{r_0}{r} x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

avec $x = \cos \theta$.

R peut être décomposé sur la base des polynômes de Legendre :

$$R = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_n P_n(x)$$

où les coefficients η_n sont donnés par :

$$\eta_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 R(x) P_n(x) dx$$

$$\text{soit } \eta_n = \frac{2n+1}{2} S \frac{r_0}{r} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^m \int_0^1 x P_m(x) P_n(x) dx$$

.../...

Si on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à 1 en $\frac{a}{r}$ le développement de R se réduit à :

$$R = S \left(\frac{r_o}{r} \right) \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} P_1(x) + \sum_{p=1}^{+\infty} \eta_{2p} P_{2p}(x) \right\}$$

$$\text{avec } \eta_n = \frac{2n+1}{2} \left[\frac{1 \cdot (-1) \cdot \dots \cdot (3-n)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2+n)} \right] \quad \text{pour } n = 2p$$

Le premier terme $\frac{1}{4} S \frac{r_o}{r} \simeq \frac{1}{4} S$ peut être considéré comme constant. Il représente le rayonnement moyen et peut être négligé

pour l'étude de la marée : il joue le même rôle que le terme constant dans l'expression du potentiel générateur (voir chapitre III). Le développement en fonction des coordonnées L, G, AH_o et δ est analogue à celui du potentiel générateur :

$$R(L, G, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n c_{nm}(t) Y_{nm}(L, G)$$

$$\text{avec } c_{1m} = \frac{2\pi}{3} S \frac{r_o}{r} Y_{1m}^*(\delta, AH_o)$$

$$c_{(2p+1)m} \simeq 0 \quad \text{pour } p = 1, 2, \dots$$

$$c_{(2p)m} \simeq 2\pi S \frac{r_o}{r} \left[\frac{1 \cdot \dots \cdot (3-2p)}{2 \cdot \dots \cdot (2+2p)} \right] Y_{(2p)m}^*(\delta, AH_o) \\ \text{pour } p = 1, 2, \dots$$

Le développement de R ainsi obtenu diffère du développement de V par la présence des harmoniques Y_{10} , Y_{11} et par la convergence plus lente des harmoniques supérieurs vers zéro.

Le terme en Y_{10} représente des oscillations à longues périodes : il permet la prise en compte des variations saisonnières du niveau moyen qui interviennent très faiblement dans la marée astronomique. Le terme en Y_{11} , qui est proportionnel à $e^{-i AH_o} \cos \delta$, où AH_o est l'angle horaire du Soleil rapporté au méridien de Greenwich et δ sa déclinaison, correspond à des oscillations diurnes qui sont également mal représentées par la marée astronomique.

.../...

4.3. Analyse linéaire

La fonction d'entrée a été développée sous la forme :

$$U(L, G, t) = \underbrace{\sum_n \sum_{m=-n}^n d_{nm}(t) Y_{nm}(L, G)}_{\text{potentiel générateur}} + \underbrace{\sum_n \sum_{m=-n}^n c_{nm}(t) Y_{nm}(L, G)}_{\text{rayonnement solaire}}$$

Chacun des termes d_{nm} ou c_{nm} peut être considéré comme une fonction d'entrée indépendante. En négligeant, en première approximation, les termes d'interactions non linéaires, on peut chercher à développer $h(t)$ sous la forme :

$$\hat{h}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{j=1}^2 \sum_{m,n} \sum_{s=-S}^S w_{nm}^j(s\Delta) \chi_{nm}^{j*}(t - s\Delta) \right\} \quad (13)$$

où χ_{nm}^j représente l'entrée d_{nm} ($j = 1$) ou c_{nm} ($j = 2$)

* indique le complexe conjugué

et Re indique la partie réelle

w_{nm}^j est la réponse impulsionnelle associée à χ_{nm}^j .

L'admittance correspondante est :

$$w_{nm}^j(f) = \sum_{s=-S}^S w_{nm}^j(s\Delta) e^{-2i\pi s\Delta f} \quad (14)$$

A partir de considérations sur les caractéristiques spectrales des fonctions d'entrée, et compte tenu des premiers résultats numériques obtenus, MUNK et CARTWRIGHT adoptent un pas d'échantillonnage Δ de 2 jours et une limite de sommation $S = 3$.

Les poids $w_{nm}^j(s\Delta)$ sont calculés par une méthode des moindres carrés : on écrit la relation (13) pour chaque instant d'observation t_p , $p = 1, \dots, P$ et on résout le système linéaire obtenu à l'aide du critère :

$$\sum_p \left\{ h(t_p) - \hat{h}(t_p) \right\}^2 \quad \text{minimum.}$$

Les admittances sont ensuite calculées à l'aide de la relation (14).

.../...

4.4. Analyse des interactions non linéaires

Lorsque les termes non linéaires ne sont plus négligeables, on peut appliquer deux méthodes d'analyse.

Une première méthode utilise un développement du type:

$$\hat{h}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_j \sum_{n,m} \sum_{s_1} w_{nm}^j(s_1 \Delta) X_{nm}^{j*}(t - s_1 \Delta) + \right. \\ \left. \sum_j \sum_k \sum_{nm} \sum_{pq} \sum_{s_1} \sum_{s_2} w_{nmpq}^{jk}(s_1 \Delta, s_2 \Delta) X_{nm}^{j*}(t - s_1 \Delta) X_{pq}^{k*}(t - s_2 \Delta) + \dots \right\}$$

Les coefficients $w_{nm}^j(s_1 \Delta)$, $w_{nmpq}^{jk}(s_1 \Delta, s_2 \Delta)$, etc... sont déterminés par la méthode des moindres carrés. Cette méthode est assez lourde à mettre en oeuvre.

CARTWRIGHT a proposé, en 1967, une technique plus simple basée sur la détermination d'une première approximation de $\hat{h}$ à l'aide de (13). Pour cette première approximation, il ne fait intervenir que les fonctions diurnes et semi-diurnes d_{21} , d_{22} . Les poids correspondants étant déterminés, posons :

$$\hat{h}_j(t) = \sum_s w_{2,j}^0(s \Delta) d_{2,j}^*(t - s \Delta) \quad ; \quad i = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} 1, \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} 2$$

$\text{Re}(\hat{h}_{-1} + \hat{h}_1)$ et $\text{Re}(\hat{h}_{-2} + \hat{h}_2)$ représentent respectivement une première approximation de la marée diurne et de la marée semi-diurne.

La deuxième approximation de $\hat{h}$ est développée sous la forme :

$$\hat{h}(t) = \text{Re} \left\{ \sum_j \sum_{n,m} \sum_s w_{nm}^j(s \Delta) X_{nm}^{j*}(t - s \Delta) \right. \\ \left. + \sum_{p,q} \sum_{s_1} \sum_{s_2} v_{pq}(s_1 \Delta, s_2 \Delta) \left\{ \hat{h}_p(t - s_1 \Delta) \hat{h}_q(t - s_2 \Delta) \right\}^* \right. \\ \left. + \text{termes d'interactions triples} \right\}$$

L'expérience montre qu'on peut alors se contenter de faire intervenir les coefficients $v_{pq}(0,0)$, $v_{pqr}(0,0,0)$, ce qui simplifie nettement les calculs. Les coefficients sont encore déterminés par la méthode des moindres carrés.

.../...

4.5. Autres applications

La méthode de réponse permet en fait d'étudier la corrélation entre la hauteur d'eau observée en un point et n'importe quelle fonction du temps.

Ainsi, en utilisant comme fonction d'entrée la hauteur observée en un autre point, on obtient une généralisation de la méthode des concordances. Cette technique peut être intéressante pour l'étude de la propagation de la marée : si on veut, par exemple, étudier la propagation de la marée dans un fleuve, on prendra comme marée de référence la marée à l'embouchure. Lorsqu'on dispose d'une marée de référence suffisamment bien connue, l'analyse des courtes périodes d'observation est également possible.

L'utilisation d'une marée prédite comme fonction d'entrée permet d'une part le contrôle de la qualité des observations et d'autre part l'étude des variations accidentelles du niveau. On pourra ainsi détecter, par exemple, le bouchage progressif du canal de communication avec la mer du puits du marégraphe, qui se traduira par une réduction de l'amplitude observée et par l'apparition d'un déphasage entre la marée observée et la marée prédite. Ces phénomènes sont bien mis en évidence par le calcul de l'admittance entre marée observée et marée prédite.

CHAPITRE X

PREDICTION DE LA MAREE : METHODES PRECISES

1 - GENERALITES

La connaissance préalable de la marée est indispensable à la conduite des activités maritimes côtières. Ainsi, l'accès des chenaux et des ports est, dans bien des cas, déterminé, par la hauteur de la marée, en particulier pour les navires à fort tirant d'eau. L'ouverture et la fermeture des écluses conduisant aux bassins à flot, le fonctionnement des usines marémotrices sont réglés par le rythme des pleines et des basses mers. La connaissance des caractéristiques générales de la marée, notamment des niveaux extrêmes qu'elle peut atteindre, conditionne la construction et la sécurité des ouvrages en bordure de mer. Les chantiers de constructions navales qui lancent de gros navires dans des eaux souvent peu profondes fixent les heures, et parfois même les dates, de lancement en fonction de la marée. Dans le domaine militaire, l'exécution des opérations amphibies exige des conditions précises de marée. Ajoutons enfin que pêcheurs et estivants des stations balnéaires réclament eux aussi des renseignements sur la marée.

Les prédictions de marée donnent lieu à la publication, par les services hydrographiques de nombreux pays, d'ouvrages périodiques appelés annuaires de marée. Le plus souvent ils satisfont aux besoins nationaux mais certains ont une couverture mondiale.

Deux types de prédiction sont nécessaires suivant les cas : la prédiction de la marée à un instant quelconque et la prédiction des heures et hauteurs des pleines et basses mers. Dans le premier cas, la prédiction des hauteurs d'heure en heure suffit en général, la hauteur d'eau à un instant quelconque pouvant être calculée facilement par interpolation linéaire. Ce type de prédiction, qui semble a priori le plus pratique, est cependant assez rare. Pour limiter le volume des annuaires, mais surtout par tradition, on se contente le plus souvent de prédire les heures et hauteurs des pleines et basses mers et d'établir des tables, formules ou graphiques à caractère perma-

nent permettant de déduire, avec une plus ou moins grande précision, la hauteur de la marée à un instant quelconque.

Pour des raisons évidentes de coût, eu égard aux besoins, les prédictions précises sont limitées aux points les plus fréquentés, appelés ports principaux (standard ports des anglo-saxons), pour lesquels on possède d'ailleurs en général de longues séries d'observations permettant d'affiner les formules de prédiction. Les autres ports, dits ports secondaires, font l'objet de prédictions moins exactes obtenues à partir de celles des ports principaux voisins par des formules de rattachement. Ces procédés sont décrits dans le chapitre suivant.

La méthode la plus générale pour l'obtention de prédictions précises est l'application de la formule harmonique. Lorsque la marée semi-diurne est très prédominante, la formule de LAPLACE et la méthode des concordances fournissent également de bons résultats pour la prédiction des pleines et basses mers. La méthode de réponse n'a encore jamais été employée pour la production des annuaires ; les quelques comparaisons effectuées avec la méthode harmonique montrent qu'elle ne fournit pas de résultats sensiblement meilleurs.

2 - PREDICTION PAR LA FORMULE DE LAPLACE

2.1 - Principe

L'application de la formule de LAPLACE à la prédiction d'une marée de type semi-diurne est relativement intéressante si l'on se limite à la recherche des pleines et basses mers. Pour une prédiction directe des hauteurs horaires, la nécessité de calculer les éléments astronomiques enlèverait tout avantage à cette formule par rapport à la formule harmonique.

La méthode de prédiction repose sur le calcul des heures de pleine mer. On admet, à cet effet, que la marée diurne est suffisamment faible devant la marée semi-diurne pour que les heures des pleines mers de la marée totale et de la marée semi-diurne soient confondues. Les heures des pleines mers étant connues, on en déduit celles des basses mers par une règle empirique puis les hauteurs par application de la formule de LAPLACE.

Cette méthode est utilisée depuis 1839 pour la prédiction de la marée de Brest qui sert à l'établissement de l'annuaire des marées des ports de France publié chaque année par le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine.

2.2 - Etapas du calcul

L'application de la formule de LAPLACE suppose que l'on connaît la suite $\{\theta_n\}$ des heures de passage de la Lune au méridien du lieu considéré, pour la période de prédiction choisie, et les valeurs correspondantes de l'angle horaire du Soleil A_2 , des déclinaisons δ_1 et δ_2 de la Lune et du Soleil et des rapports de leur parallaxe à la parallaxe moyenne i_1 et i_2 . Ces éléments sont déterminés à partir des lois du mouvement des astres.

On calcule successivement pour chaque passage , à l'aide des formules établies au chapitre V :

- les amplitudes des termes semi-diurnes : $A_{21} = B_{21} i_1^3 \cos^2 \delta_1$

$$A_{22} = B_{22} i_2^3 \cos^2 \delta_2$$

- la qualité $P_n = -\frac{1}{2} \text{Arc tg} \frac{\sin (2 \lambda_2)}{\frac{29}{30} \frac{A_{21}}{A_{22}} + \cos (2 \lambda_2)}$

- l'heure de la pleine mer : $t_n = \theta_n + T_2 + \frac{30}{29} (\lambda_2 + P_n)$

- l'heure de la basse mer : $t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (t_n + t_{n+1})$

On peut appliquer aux heures ainsi calculées une correction empirique pour tenir compte de l'influence des ondes supérieures et composées. Ainsi pour le calcul de la marée de BREST, on ajoute 8 minutes aux heures de basses mers et on applique aux heures de pleines mers la "correction GAUSSIN", comprise entre 0 et - 5 minutes en fonction de l'heure calculée.

- le rayon de la marée semi-diurne à l'instant $(\theta_n + T_2)$:

$$R_2 = \sqrt{A_{21}^2 + A_{22}^2 + 2A_{21}A_{22}\cos (2 \lambda_2)}$$

Cette valeur est attribuée à l'extrémum dont l'heure est la plus voisine de $(\theta_n + T_2)$. Ce sera une basse mer ou une pleine mer selon la valeur de λ_2 . Le rayon de l'extrémum intermédiaire est pris égal à la demi-somme des rayons encadrants.

Les termes diurnes et à longue période sont calculés respectivement pour les instants $(\theta_n + T_1)$ et θ_n . Leurs valeurs aux instants t_n et $t_{n+\frac{1}{2}}$ sont obtenues par interpolation. La sommation de ces valeurs et du terme² semi-diurne donne la hauteur des pleines et basses mers.

3 - PREDICTION HARMONIQUE

3.1 - Principe

L'application de la formule harmonique permet de déterminer la hauteur d'eau à un instant quelconque à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires dont le nombre devient cependant rapidement élevé lorsqu'on utilise une ou plusieurs dizaines d'ondes pour obtenir une prédiction précise. La prédiction des hauteurs à intervalles réguliers sur une période donnée, par cette méthode, ne soulève plus de difficultés particulières en calcul automatique.

Les heures et hauteurs des pleines et basses mers sont obtenues par un procédé numérique, itératif ou direct, de recherche des extrémums de la courbe de marée.

3.2 - Calcul des hauteurs en fonction du temps

3.2.1 - Méthode directe

La hauteur d'eau à l'instant t est donnée par l'expression :

$$h(t) = Z_o + \sum_{i=1}^N f_i h_i \cos(q_i t + v_{oi} + u_i - g_i)$$

avec Z_o : hauteur du niveau moyen au-dessus du niveau de référence ;

f_i, u_i : corrections nodales calculées suivant la méthode indiquée au chapitre VIII (§ 1.3) ;

h_i, g_i : constantes harmoniques de l'onde i ;

q_i : vitesse angulaire de l'onde i ;

v_{oi} : argument astronomique de l'onde i à l'instant $t_{UT} = 0$

Ces deux dernières quantités sont calculées à partir des expressions des variables fondamentales en fonction du temps indiquées au chapitre VI (§ 2.3 et 5).

Il faut calculer, pour une prédiction portant sur un an par exemple, un grand nombre de cosinus. Leur calcul direct est pénalisant en temps, ce qui a conduit à adopter des procédés plus économiques. Le plus simple consiste à opérer par interpolation linéaire dans une table de cosinus restreinte aux arguments, exprimés en degrés, entiers. Ceci est suffisant pour assurer la précision du centimètre sur les hauteurs calculées.

3.2.2 - Méthode des hauteurs réduites

Lorsque les ondes supérieures et composées sont peu nombreuses et peu importantes, le calcul des hauteurs horaires suffit à obtenir une bonne définition de la courbe de marée. Dans le cas contraire, en particulier pour les marées fluviales, il est nécessaire de prendre un pas d'échantillonnage plus petit, par exemple 10 minutes, et le temps de calcul correspondant à la méthode directe devient très long.

Afin de réduire le temps de calcul, une méthode de prédiction originale a été mise au point au Service Hydrographique et Océanographique de la Marine. C'est l'application, en sens inverse, de la méthode des hauteurs réduites exposée au chapitre VIII (voir § 4). Pour une prédiction avec 200 ondes, le temps de calcul est divisé par trois par rapport à la méthode classique.

Soit T_0 l'instant du début de la prédiction et N le nombre de jours à prédire. L'unité de temps est le jour (lunaire ou solaire, voir remarque § 4.2, chapitre VIII). On calcule successivement, en reprenant les notations du chapitre VIII :

- les modulations C_k des vecteurs représentatifs de chaque espèce k :

$$C_k(T_1) = \sum_j r_{jk} e^{2i\pi j k T_1}$$

$$C_{-k}(T_1) = \overline{C_k(T_1)}$$

pour $k = 0, 1, \dots, K$

$$T_1 = T_0 + l \quad \text{avec } l = -1, 0, \dots, (N+1)$$

- les hauteurs réduites :

$$R(T_1, t_n) = \sum_{k=-K}^K C_k(T_1) e^{-2i\pi k t_n}$$

$$\text{avec } t_n = T_1 + \frac{n-K}{2K}, \quad n = 0, 1, \dots, (2K-1)$$

Le gain en temps de calcul est réalisé en utilisant un algorithme de transformation de FOURIER rapide. Le nombre d'espèces K doit être suffisamment important pour que ce gain soit significatif. S'il ne satisfait pas la condition d'emploi de l'algorithme retenu, il suffit de compléter par des vecteurs C_k nuls. On calcule ainsi $2K$ valeurs centrées autour de l'instant T_1 .

Lorsque T_1 est fixé, la fonction $R(T_1, t)$ est périodique en t et a pour période le jour. C'est la hauteur obtenue en figeant les modulations de chaque espèce à leur valeur à l'instant T_1 . Ces modulations varient lentement avec le temps et sont confondues avec leur développement limité au second ordre sur une période de deux jours. Ceci permet de calculer la hauteur prédite à l'instant t_n par interpolation parabolique entre $R(T_1 - 1, t_n)$, $R(T_1, t_n)$, et $R(T_1 + 1, t_n)$:

$$h(t_n) = (t_n - T_1)^2 \frac{R(T_1 - 1, t_n) + R(T_1 + 1, t_n) - 2R(T_1, t_n)}{2}$$

$$+ (t_n - T_1) \frac{R(T_1 + 1, t_n) - R(T_1 - 1, t_n)}{2} + R(T_1, t_n)$$

La hauteur à un instant quelconque est obtenue par interpolation parabolique entre les hauteurs $h(t_n)$.

3.3 - Calcul des pleines et basses mers

3.3.1 - Analyse de la courbe dérivée

Les extrémums de la courbe de marée correspondent aux racines de l'équation

$$h'(t) = 0$$

$$\text{soit (1)} \quad \sum_i f_i q_i h_i \sin(q_i t + V_{oi} + u_i - g_i) = 0$$

Il s'agit d'une équation transcendante dont les solutions doivent être recherchées par approximations successives.

A cet effet, on détermine une suite d'intervalles à l'intérieur desquels l'équation (1) admet une solution et une seule. On calcule $h'(t)$ à des instants régulièrement espacés, suffisamment proches pour qu'il n'y ait pas plus d'un extrémum entre deux instants successifs. Le choix du pas d'échantillonnage dépend du type de marée : dans le cas d'une marée semi-diurne il suffit de calculer une valeur toutes les trois heures ; dans les autres cas, on calculera une valeur toutes les heures. Lorsqu'on trouve un intervalle $[a, b]$ aux extrémités duquel h' prend des valeurs de signes opposés, plusieurs techniques sont envisageables pour définir l'instant de l'extrémum avec une précision suffisante. Dans la méthode de bipartition, on découpe successivement l'intervalle en deux en conservant le demi-intervalle aux extrémités duquel h' prend des valeurs de signes opposés (figure 1). On s'arrête lorsque la longueur de l'intervalle est inférieure à la précision souhaitée. Dans la méthode des parties proportionnelles, on coupe l'intervalle au point d'intersection avec l'axe des abscisses du segment joignant les points d'abscisses a et b sur la courbe dérivée (figure 2) :

$$t = a - \frac{b - a}{h'(b) - h'(a)} h'(a)$$

et on recommence sur l'intervalle $[a, t]$ ou $[t, b]$ suivant que $h'(a) \times h'(t)$ ou $h'(t) \times h'(b)$ est négatif.

L'instant t ainsi défini converge vers une racine de (1).

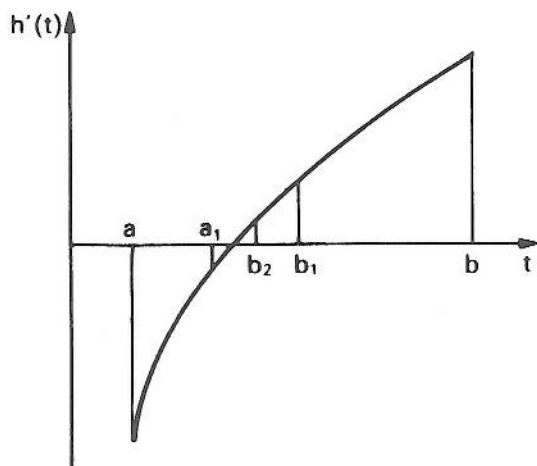


Figure 1 — Méthode de bipartition

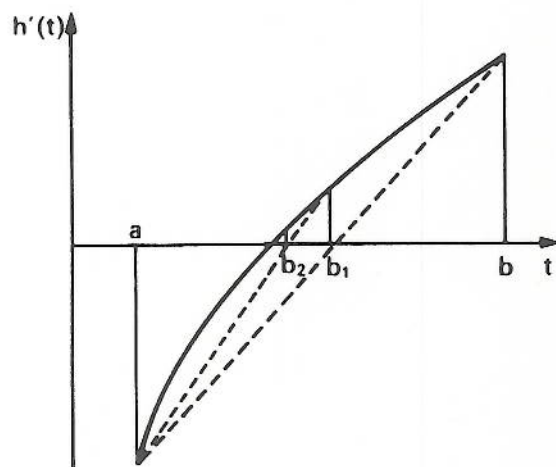


Figure 2 — Méthode des parties proportionnelles

Dans le cas d'une marée semi-diurne, la méthode de NEWTON est plus économique. On part d'une valeur approchée t_0 de l'instant de l'extrémum et on utilise un développement limité au 1er ordre au voisinage de la valeur approchée :

$$t_n = t_{n-1} - \frac{h'(t_{n-1})}{h''(t_{n-1})}$$

Trois ou quatre itérations suffisent pour assurer une bonne précision. La première valeur est déterminée à partir de $t_0 = 0$, l'origine des temps étant prise au début de la prédiction. On ajoute six heures à l'instant ainsi calculé pour obtenir une valeur approchée de la racine suivante. Cette méthode est mise en défaut lorsque la marée est irrégulière : on peut alors sauter un extrémum ou calculer deux fois de suite le même.

Lorsque les heures de pleines et basses mers sont connues, on calcule facilement les hauteurs correspondantes par la formule harmonique.

3.3.2 - Analyse de la courbe de marée

On peut aussi déterminer directement les pleines et basses mers à partir de la prédiction des hauteurs à intervalles réguliers. Un premier procédé consiste à isoler chaque valeur extrême dans la série des hauteurs prédites.

On fait ensuite une nouvelle prédiction avec un pas en temps égal à la précision souhaitée, en commençant à l'instant précédant celui de la valeur extrême dans la prédiction initiale. La nouvelle valeur extrême et l'instant correspondant sont adoptés comme hauteur et heure de l'extrémum.

Un deuxième procédé, plus rapide, repose sur l'assimilation de la courbe de marée au voisinage de l'extrémum à un arc de parabole dont les coordonnées du sommet fournissent l'heure et la hauteur de l'extrémum. Soit trois hauteurs h_1 , h_2 , h_3 correspondant aux instants $t_0 - \Delta$, t_0 et $t_0 + \Delta$ dans la prédiction initiale. Il y a un extrémum entre les instants $t_0 - \frac{\Delta}{2}$ et $t_0 + \frac{\Delta}{2}$ si h_2 est supérieur ou inférieur à h_1 et h_3 , c'est-à-dire si la condition suivante est vérifiée :

$$(h_2 - h_1) (h_2 - h_3) \geq 0$$

On assimile la courbe de marée entre $t_0 - \Delta$ et $t_0 + \Delta$ à un arc de parabole passant par les trois points h_1 , h_2 , h_3 , dont l'équation est :

$$h = \frac{h_3 + h_1 - 2h_2}{2\Delta^2} (t - t_0)^2 + \frac{h_3 - h_1}{2\Delta} (t - t_0) + h_2$$

Les coordonnées du sommet ($\frac{dh}{dt} = 0$) sont :

$$t = t_0 + \frac{\Delta}{2} \frac{h_1 - h_3}{h_3 + h_1 - 2h_2}$$

$$h = h_2 - \frac{1}{8} \frac{(h_1 - h_3)^2}{h_3 + h_1 - 2h_2}$$

Le choix du pas initial Δ dépend de la précision souhaitée et de la forme de la courbe de marée au voisinage de l'extrémum. On se contente souvent de partir des hauteurs horaires. Pour ne pas calculer deux fois le même extrémum, on ne retient pas le cas $h_1 = h_2$.

4 - LES ANNUAIRES DE MAREE

4.1 - Généralités

Les services hydrographiques nationaux mettent les prédictions de marée à la disposition des utilisateurs sous forme d'ouvrages périodiques, en principes annuels, appelés annuaires de marée. Ces ouvrages se présentent à peu près tous sous une forme semblable : ils comprennent une partie périodique sous forme de prédictions des heures et hauteurs des pleines et basses mers pour les ports principaux et une partie permanente permettant de déduire la marée à un instant quelconque en ces mêmes points ou en d'autres qui leur sont rattachés, les ports secondaires. Certains ports, aux marées particulières, font l'objet de prédictions horaires. Le mode d'utilisation des annuaires de marée est décrit au chapitre suivant.

Trois pays, la Grande-Bretagne, les Etats-Unis et l'Allemagne de l'Ouest, publient un annuaire à couverture mondiale, celui des Anglais, les "Admiralty Tide Tables", étant le plus complet, avec plus de 200 ports principaux. L'annuaire publié par le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine comprend, outre les prédictions pour les ports métropolitains, celles relatives aux ports des départements et territoires d'outre-mer et des anciennes colonies.

L'emploi de procédés automatiques de calcul et d'impression, en supprimant un certain nombre de risques d'erreurs lors des calculs et des recopies, simplifie considérablement les opérations de vérification. Il permet un gain de temps important par rapport aux procédés anciens.

4.2 - L'annuaire des marées du Service Hydrographique et Océanographique de la Marine

L'annuaire des marées du Service Hydrographique et Océanographique de la Marine est publié chaque année depuis 1839 et a été remanié à plusieurs reprises. Sous sa forme actuelle, il comprend deux tomes. Le tome I, relatif aux ports de France, donne les prédictions des heures et hauteurs des pleines et basses mers pour 19 ports principaux des côtes françaises de la Mer du Nord, de la Manche, de l'Atlantique et de la Méditerranée. Il contient également la table des coefficients de la marée à BREST, les hauteurs horaires de la marée au HAVRE et à SAINT-MALO et une table de ports rattachés. Cette table fournit les éléments nécessaires au calcul, à partir des prédictions relatives aux ports principaux, des heures et hauteurs des pleines et basses mers en un peu plus de 200 ports secondaires britanniques, irlandais, belges, néerlandais, français et espagnols. Des graphiques permettent de prédire approximativement la hauteur de la marée à un instant quelconque, à partir des heures et hauteurs des pleines et basses mers encadrant cet instant.

Le tome II, relatif aux ports d'outre-mer, donne les prédictions des pleines et basses mers pour 35 ports des départements et territoires d'outre-mer et des anciennes colonies d'Afrique ou d'Indochine ainsi que les éléments de rattachement pour plus de 150 ports secondaires.

Les étapes de l'élaboration de l'annuaire sont le calcul des prédictions, la tabulation des résultats et l'impression.

La phase de calcul est effectuée sur ordinateur et aboutit à la constitution de trois fichiers : le fichier des heures et hauteurs des pleines et basses mers des ports principaux, le fichier des coefficients de la marée à BREST et le fichier des hauteurs horaires au HAVRE et à SAINT-MALO. On utilise la formule de LAPLACE pour calculer les heures et hauteurs des pleines et basses mers de BREST. Les éléments astronomiques nécessaires sont fournis, sur support informatique, par le Bureau des Longitudes. Les pleines et basses mers de certains ports de France et les hauteurs horaires de SAINT-MALO sont déduites des pleines et basses mers de BREST à l'aide de tables de concordance, suivant les méthodes indiquées au chapitre IX. La formule harmonique est employée pour la prédiction des hauteurs horaires des autres ports de France et de ceux d'outre-mer. Les pleines et basses mers sont calculées par interpolation parabolique (cf § 3.2.2).

La tabulation des fichiers suivant le format de l'annuaire est également réalisée par ordinateur. Cette opération donne lieu à la création, pour chaque port principal, d'un fichier sur support informatique lisible par la photocomposeuse. Une sortie sur listage avec une mise en page analogue à celle de l'annuaire est disponible pour contrôle.

La phase d'impression débute par la photocomposition automatique des prédictions. Les typons ainsi obtenus sont combinés manuellement avec les typons permanents (cadres, titres, table de ports rattachés, graphiques, etc...) puis reportés sur zinc par photogravure pour l'impression proprement dite.

L'annuaire pour l'année n est publié en principe à la fin de l'année $n - 2$.

5 - PRECISION DES PREDICTIONS

Le calcul des pleines et basses mers prédites dans les annuaires est effectué, en principe, avec une précision de quelques centimètres sur les hauteurs et de quelques minutes sur les heures. Mais les écarts entre la marée prédite et la marée observée peuvent être notablement plus importants. Ils dépendent, d'une part, des imperfections de la formule de prédiction et donc, en particulier, de la qualité (précision, durée, pas d'échantillonnage) des observations qui ont servi à l'établir, et, d'autre part, des variations imprévisibles du niveau de la mer, surtout d'origine météorologique, qui modifient de façon non négligeable les hauteurs observées par rapport à la marée astronomique.

Les méthodes d'analyse éliminent en général assez bien les perturbations aléatoires des observations, qu'elles soient d'origine instrumentale ou météorologique, pourvu que la période d'observation soit longue. Par contre, les effets systématiques se retrouvent le plus souvent dans la prédiction. Ainsi, le niveau moyen utilisé dans une prédiction harmonique est celui de la période d'observation analysée. Si on n'a disposé que d'un mois d'observation pour le déterminer, les variations mensuelles du niveau moyen autour duquel la marée réelle oscille contribueront à écarter la marée prédite de la marée observée. L'inadéquation du modèle employé pour l'analyse et la prédiction contribue également à réduire la précision des prédictions. Nous avons vu, par exemple, lors de l'examen des méthodes d'analyse harmonique, que la durée d'observation conditionne la séparabilité des ondes d'une même espèce. Lorsque cette durée est trop courte, il faut adopter des hypothèses supplémentaires pour calculer des constantes plus ou moins proches de la réalité. Dans le cas des marées par petits fonds, la détermination d'un nombre suffisant d'ondes supérieures et composées rendant compte de la déformation de la courbe de marée suppose un échantillonnage serré des observations. Cette difficulté est à l'origine de l'emploi de procédés permettant d'améliorer dans ce cas les seules prédictions des pleines et basses mers sans qu'il soit nécessaire d'introduire un grand nombre d'ondes supplémentaires.

Les variations accidentelles du niveau de la mer agissent sur les prédictions par les perturbations qu'elles ont pu apporter aux observations qui ont servi à établir la formule de prédiction. Elles agissent surtout avec une importance plus considérable, car non atténuée par le procédé d'analyse, sur la hauteur d'eau réelle. Elles sont la cause essentielle des écarts entre la prédiction et la hauteur d'eau observée. Ces variations sont quelquefois d'origine sismique (les tsunamis) mais le plus souvent elles sont d'origine météorologique. De l'ordre du décimètre en général, elles peuvent dans certaines régions et sous certaines conditions atteindre et dépasser le mètre, sous forme d'ondes de tempête par exemple. La modélisation précise de ces variations à partir des prévisions météorologiques est assez délicate et dépasse le cadre de ce cours. Dans l'état actuel des connaissances, elle n'est possible, par des modèles numériques complexes, qu'à court terme (un ou deux jours). Des méthodes plus simples, telles que la correction barométrique de -1 cm/mb , destinée à éliminer les effets statiques de la pression atmosphérique en assimilant l'océan à un baromètre inversé, n'apportent qu'une amélioration très relative.

L'évaluation de la précision d'une prédiction est faite par comparaison systématique des marées prédites et observées. Des résultats tels que ceux présentés sur la figure 3 permettent d'obtenir une estimation de la fréquence des écarts entre la prédiction et l'observation, donc d'évaluer le degré de confiance à accorder à la méthode de prédiction employée.

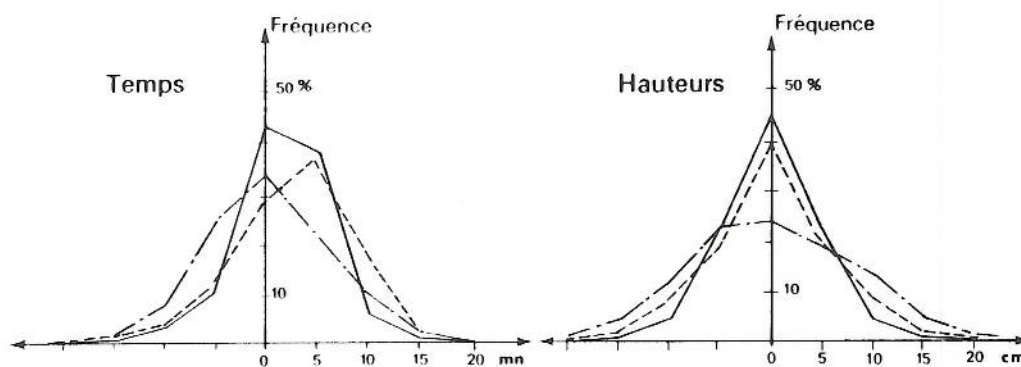


Figure 3. Écart entre la marée observée et la marée prédite à Brest en 1978 (pleines et basses-mers)

- formule harmonique (200 ondes)
- formule de LAPLACE (BREST théorique)
- formule de LAPLACE et concordance (BREST- PENFELD)

CHAPITRE XI

PREDICTIONS DE LA MAREE : METHODES EXPEDITIVES

1 - GENERALITES

Les méthodes expéditives de prédiction de la marée sont employées pour résoudre deux types de problème : la prédiction des heures et hauteurs des pleines et basses mers ou la prédiction de la hauteur de la marée à un instant quelconque. La précision de ces méthodes est très variable mais suffisante en général pour les besoins de la navigation. Elles s'appuient sur des éléments de marée fournis dans les documents nautiques et font le plus souvent appel à des règles empiriques dont la validité est d'autant plus satisfaisante que la marée considérée est plus proche d'une marée semi-diurne régulière.

L'apparition de calculatrices de poche programmables à grande capacité de mémoire devrait permettre à terme l'emploi des procédés précis mais tout aussi commodes, sinon plus, que les procédés expéditifs classiques.

2 - PREDICTION DES PLEINES ET BASSES MERS

2.1 - Application des concordances

L'emploi des formules de concordances permet de prédire facilement les heures et hauteurs des pleines et basses mers d'un port secondaire à partir des mêmes éléments prédits pour le port principal correspondant. Les relations de concordances :

$$(1) x_s^i = f^i(x_p^i) \text{ avec } \begin{array}{l} x_p^1 : \text{hauteur de la basse mer} \\ x_p^2 : \text{hauteur de la pleine mer} \\ x_p^3 : \text{heure de la basse mer} \\ x_p^4 : \text{heure de la pleine mer} \end{array}$$

entre les valeurs au port secondaire S et au port principal P du même élément x^i sont tabulées en assimilant la courbe de concordance ou, plus rarement, une portion de la courbe de concordance à un segment de droite.

Ainsi, la Table permanente des hauteurs d'eau, publiée par le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (ouvrage n° 530), contient, pour un certain nombre de ports français et étrangers de la Mer du Nord, de la Manche et de l'Atlantique, des tableaux donnant les valeurs des éléments x_s^i en fonction des éléments correspondants à BREST. Les arguments retenus sont les heures rondes et les hauteurs de 25 en 25 cm à BREST. Les valeurs correspondant à une pleine mer ou à une basse mer quelconque à BREST se calculent très simplement par interpolation linéaire.

Mais, le plus souvent, le calcul des éléments de la marée au port secondaire est effectué avec l'une ou l'autre des formules approchées ci-dessous :

$$(2) x_s^i = a^i x_p^i + b^i$$

$$(3) x_s^i = x_p^i + \Delta^i_1 + (\Delta^i_2 - \Delta^i_1) \frac{x_p^i - x_{p1}^i}{x_{p2}^i - x_{p1}^i}$$

$$\text{avec } \Delta^i_1 = f^i(x_{p1}^i) - x_{p1}^i$$

$$\Delta^i_2 = f^i(x_{p2}^i) - x_{p2}^i$$

$$(4) x_s^i = \begin{cases} x_p^i + \Delta^i_1 & \text{si } |x_p^i - x_{p1}^i| < |x_p^i - x_{p2}^i| \\ x_p^i + \Delta^i_2 & \text{si } |x_p^i - x_{p2}^i| < |x_p^i - x_{p1}^i| \end{cases}$$

On trouve, dans les annuaires de marée, ou dans certains ouvrages comme les Instructions Nautiques, des tables donnant les paramètres correspondant à la formule de prédiction adoptée.

La formule (2), avec la condition supplémentaire $a^i = 1$, est celle qui est la plus couramment utilisée pour la prédiction des heures des pleines et basses mers. Les quantités b^3 et b^h sont alors les écarts moyens en temps entre les pleines et basses mers en P et en S. Cette formule est aussi employée pour la prédiction des hauteurs : c'est, par exemple, la formule retenue pour les tables de ports secondaires de l'annuaire des marées du National Ocean Survey des Etats-Unis où l'un des deux coefficients a ou b est éventuellement fixé respectivement à 1 ou 0. Les annuaires portugais et japonais utilisent une forme équivalente mais qui fait intervenir les niveaux moyens :

$$x_s^i = a^i (x_p^i - Z_{op}) + Z_{os} \quad (i = 1, 2)$$

Les coefficients a^1 et a^2 étant ou non identiques.

La formule (3) sert au calcul des hauteurs dans les annuaires français, anglais et allemands. Les corrections Δ sont alors données pour deux hauteurs caractéristiques de pleine mer ou de basse mer (vive-eau et morte-eau moyennes pour la marée semi-diurne). On se contente quelquefois d'une formule unique pour les pleines et basses mers en interpolant (ou en extrapolant) entre les corrections indiquées pour une hauteur de basse mer et une hauteur de pleine mer particulières. Cette formule est utilisée pour le calcul des heures dans le volume des "Admiralty Tide Tables" relatif aux côtes européennes, à partir des valeurs extrêmes des corrections en temps et des heures correspondantes des pleines et basses mers du port principal.

L'annuaire des ports de France recommande, pour le calcul de l'heure, l'emploi de la formule (4). Les corrections Δ sont indiquées pour les pleines et basses mers de vive-eau et morte-eau et on adopte l'une ou l'autre selon que l'heure de la pleine mer ou de la basse mer considérée est plus proche de l'heure en vive-eau ou en morte-eau. Dans les cas intermédiaires, on prend la moyenne des deux corrections. Cette formule est aussi celle qui est adoptée dans l'annuaire canadien pour le calcul des hauteurs.

Les tables de ports secondaires sont établies par l'analyse des observations suivant la méthode des concordances décrite au chapitre IX. Notons que le port de rattachement n'est pas forcément le port principal le plus proche qui peut avoir un régime de marée assez différent de celui du port secondaire considéré. Il doit être choisi d'après la similitude des types de marée et non d'après des critères géographiques seulement.

2.2 - Prédiction par le Saros

Nous avons vu (cf chapitre VI, § 2.3) que le potentiel générateur de la marée est fonction des variables astronomiques suivantes :

- le temps lunaire moyen τ de période 1,035 050 jours
- la longitude moyenne de la Lune s de période 27,321 582 jours
- la longitude moyenne du Soleil h de période 365,242 199 jours
- la longitude du périgée de la Lune p de période 8,847 309 ans
- la longitude du noeud ascendant de la Lune N de période 18, 612 904 ans
- la longitude du périgée du Soleil p_1 de période 209, 402 157 siècles.

Le potentiel générateur, et par suite la marée, reprend la même valeur au bout d'un intervalle de temps ramenant le système Terre-Lune-Soleil dans la même configuration. Cette condition ne peut pas être remplie exactement, mais on peut se contenter, pour une prédiction approximative, de périodes approchées.

COURTIER a recherché, parmi les périodes inférieures à 3 000 ans, celles qui satisfont au mieux le retour des éléments de la marée de BREST aux mêmes valeurs. Il obtient les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous.

Tableau 1
Périodes approchées de la marée de BREST

Période	Ecart entre les heures de pleines mers (minutes)	Ecart maximum entre les hauteurs de pleines mers (cm)
1619 ans (591 320,5 jours)	0 ± 13	7
1097 ans (400 671 jours)	1 ± 18	10
168 ans (61 364,5 jours)	3 ± 21	11
18 ans (6 585,5 jours)	9 ± 35	19

La période de 6 585,5 jours est appelée période chaldéenne ou Saros. C'est elle qui règle le retour des éclipses ; elle représente approximativement un nombre entier de lunaisons (période de $s - h$), de révolutions draconitiques (période de $s - N$), de révolutions anomalistiques (période de $s - p$), de révolutions tropiques (période de s) et de révolutions sidérales (période de $s - p_1$). D'autre part 6 585,5 jours représentent 6 362,5 jours lunaires moyens moins 9 minutes : la lune moyenne passe au méridien avec un retard de 9 minutes au bout d'un Saros. Cette quantité correspond à un retard de 1'heure de la pleine mer de la marée semi-diurne, le retard chaldéen, égal en moyenne à 9 mn. Comme les variables astronomiques ne reprennent pas rigoureusement les mêmes valeurs, ce retard fluctue autour de cette moyenne (entre 0 et 44 mn à BREST). On a des résultats analogues pour la hauteur de la pleine mer.

Pour améliorer la précision de la prédiction de la marée par cette méthode, COURTIER suggère d'appliquer le retard chaldéen obtenu pour la pleine mer qui précède la pleine mer à calculer de 369 jours. En effet, cette période ramène sensiblement les heures de passage au méridien et la déclinaison de la Lune, et par suite le retard chaldéen, aux mêmes valeurs. Ce procédé assure, pour BREST, une précision sur les heures supérieures à 5 mn.

Effectuons, à titre d'exemple, le calcul de la pleine mer du matin du 11 juillet 1980, à l'aide des prédictions établies pour 1979, 1962 et 1961 :

		heure (UT + 1)	hauteur
pleine mer du matin du 8 juillet 1979 (369 jours avant le 11/07/80)	:	03 h 27 min	6.75 m
pleine mer du soir du 26 juin 1961 (6 585,5 jours avant le 08/07/79) (1)	:	15 h 17 min	6.85 m
retard chaldéen	:	10 min	- 0.10 m
pleine mer du soir du 30 juin 1962 (6 585,5 jours avant le 11/07/80)	:	15 h 53 min	7.00 m
pleine mer du matin du 11 juillet 1980	:	04 h 03 min	6.90 m
Les prédictions de l'annuaire des marées pour 1980 sont	:	04 h 03 min	6.90 m

La méthode du Saros s'applique plus généralement à toute marée de type semi-diurne. Lorsque l'inégalité diurne devient importante, il est alors préférable, pour que les termes diurnes agissent dans le même sens, d'utiliser la période de 6 585 jours, soit 6 362 jours lunaires moyens plus 16 minutes.

Cette méthode est utilisée au Service Hydrographique et Océanographique de la Marine pour une vérification rapide, par échantillonnage, de l'annuaire des marées.

(1) $6585,5 = 18 \times 365 + 15,5$

2.3 - Application de la formule harmonique

Rédaction réservée

3 - CALCUL DE LA HAUTEUR A UN INSTANT QUELCONQUE

Très peu d'annuaires fournissent des prédictions de marée d'heure en heure permettant de calculer facilement, par interpolation linéaire, une hauteur instantanée. L'utilisateur qui désire connaître la hauteur à un instant quelconque doit la déterminer lui-même, le plus souvent à partir des prédictions des pleines et basses mers, plus rarement à l'aide de la formule harmonique et des constantes associées. Il existe un grand nombre de méthodes plus ou moins précises et plus ou moins complexes pour résoudre ce problème.

3.1 - Application de la formule harmonique

Deux méthodes simplifiées, ne nécessitant pas de calculs trop importants, sont utilisables avec les constantes fournies par les "Admiralty Tide Tables" et par l'annuaire des marées allemand. Elles nécessitent cependant une certaine pratique et ne présentent de l'intérêt, par rapport aux procédés expéditifs plus rapides, que si les ondes diurnes ne sont plus négligeables. Elles devraient disparaître, au moins sous leur forme actuelle, avec la généralisation de l'emploi en passerelle des calculatrices de poche programmables. La programmation de la formule harmonique ne soulève en effet plus de difficulté de principe dès que l'on dispose d'une capacité de mémoire suffisante eu égard au nombre d'ondes utiles.

3.1.1 - Méthode de l'Amirauté britannique

Il s'agit d'une méthode graphique dont la dernière version date de 1975. Les "Admiralty Tide Tables" indiquent pour chaque port, principal ou secondaire, les constantes harmoniques h_i et g_i des quatre ondes principales M_2 , S_2 , K_1 et O_1 , les paramètres f_4 , F_4 , f_6 et F_6 permettant de tenir compte des ondes de petits fonds et le niveau moyen Z_0 , accompagné dans certains cas de ses variations mensuelles. Une table commune à tous les ports fournit en outre pour chaque jour de l'année les paramètres correctifs F_1 et A_1 (tidal angle and factor) représentant les perturbations dues aux autres ondes sous une forme similaire aux corrections nodales. Les ondes mineures ainsi introduites sont :

- pour le groupe M_2 : N_2 , λ_2 , L_2 , $2N_2$, μ_2 , ν_2
- pour le groupe S_2 : K_2 , T_2 , R_2
- pour le groupe K_1 : P_1 , J_1 , π_1 , ϕ_1 , θ_1 , ψ_1 , SO_1
- pour le groupe O_1 : Q_1 , $2Q_1$, p_1 , σ_1 , M_1

Les amplitudes des composantes d'un groupe donné sont supposées proportionnelles aux coefficients correspondants dans le développement du potentiel générateur et les situations sont supposées constantes à l'intérieur de chaque groupe. Les corrections A_i et F_i sont calculées, avec ces hypothèses, à 0 h 00 de chaque jour et sont supposées constantes pour la journée. Elles tiennent compte des corrections nodales et de l'argument astronomique de l'onde principale de telle sorte que la contribution d'un groupe pour un jour donné soit :

$$z(t) = Fh \cos (qt - g - A)$$

l'origine des temps étant prise à 0 h 00 du jour considéré, dans le système horaire associé à la situation relative g . En introduisant le déphasage $\alpha = -12q$, on déplace l'origine des temps à midi :

$$z(t) = Fh \cos \left[q(t - 12) - g - A - \alpha \right]$$

La contribution des espèces diurnes et semi-diurnes est déterminée à l'aide de l'imprimé A (figure 1). On place sur ce graphique le point M_2 de coordonnées polaires $M = F_{M_2} h_{M_2}$ (en m) et $m = A_{M_2} + g_{M_2} + \alpha_{M_2}$ (compté de 0 à 360°) puis le vecteur M_2H_2 de longueur $S = F_{S_2} h_{S_2}$ dans la direction

$s = A_{S_2} + g_{S_2} + \alpha_{S_2}$. On admet que le triangle CM_2H_2 est indéformable au cours de la journée et tourne autour de C à la vitesse de M_2 ($q_2 = 29^\circ/h$). La contribution de l'espèce semi-diurne est donc :

$$h_{SD}(t) = H_2 \cos (q_2(t - 12) - h_2)$$

où H_2 et h_2 sont les coordonnées polaires de H_2 .

Pour calculer h_{SD} aux heures rondes, on considère l'intersection A_n du cercle de centre C et de rayon H_2 avec les demi-droites graduées de $n = 6$ à $n = 18$ qui font un angle $q_2(n - 12)$ avec la direction 0° . Soit P_n la projection de A_n sur la perpendiculaire 2-2 à CH_2 . On voit aisément que :

$$h_{SD}(n) = A_n P_n \text{ si } A_n \text{ est du même côté que } H_2 \text{ par rapport à 2-2}$$

$$h_{SD}(n) = -A_n P_n \text{ dans le cas contraire.}$$

On procède de la même façon avec l'espèce diurne (triangle CK_1H_1) dont la contribution est :

$$h_D(t) = H_1 \cos (q_1(t - 12) - h_1)$$

avec $q_1 = 14,5^\circ/h$

Les demi-droites qui font un angle q_1 ($n - 12$) avec la direction 0° sont tracées en tireté sur l'imprimé.

Les ondes de petits fonds des espèces quart-diurnes et sixièmes diurnes sont regroupées en remarquant que, à la précision cherchée :

$$\frac{h_{M_2}^2}{h_{M_4}} \approx \frac{h_{S_2}^2}{h_{S_4}} \approx \frac{h_{M_2} h_{S_2}}{h_{MS_4}} \approx \frac{h_{M_2} h_{N_2}}{h_{MN_4}} \approx \dots \approx F_4$$

$$\frac{h_{M_2}^3}{h_{M_6}} \approx \frac{h_{M_2}^2 h_{S_2}}{h_{2MS_6}} \approx \dots \approx F_6$$

$$g_{M_4} - 2g_{M_2} \approx g_{S_4} - 2g_{S_2} \approx g_{MS_4} - g_{M_2} - g_{S_2} \approx g_{MN_4} - g_{M_2} - g_{N_2} \approx f_4$$

$$g_{M_6} - 3g_{M_2} \approx g_{2MS_6} - 2g_{M_2} - g_{S_2} \approx \dots \approx f_6$$

où F_4 , f_4 , F_6 et f_6 sont des constantes déterminées pour chaque port.

Les hauteurs partielles des espèces quart-diurnes et sixième-diurnes sont donc :

$$h_{4D}(t) = F_4 H_2^2 \cos(2q_2(t - 12) - 2h_2 - f_4)$$

$$h_{6D}(t) = F_6 H_2^3 \cos(3q_2(t - 12) - 3h_2 - f_6)$$

Les valeurs aux heures rondes sont déterminées à l'aide de l'imprimé C (figure 2) similaire à l'imprimé A. Les droites d'arguments $2q_2$ ($n - 12$) et $3q_2$ ($n - 12$) sont respectivement repérées par des lettres A, P, Q, R, S, T, U et A, V, W, X, Y, Z.

La courbe de marée est tracée sur l'imprimé B (figure 3) entre 06 h et 18 h (courbe en trait plein), en reportant successivement le niveau moyen (corrigé éventuellement de sa variation mensuelle), la contribution de l'espèce semi-diurne, la correction de petits fonds et enfin la contribution de l'espèce diurne.

Place WU-SUNG K'OU (ATT No 7284) Date 10 JULY 1975
 Lat 31° 24' N Long 121° 30' E Zone Time -0800

FORM A
 [Example]

TABLE

from A.T.T., part II

from A.T.T., table VII

		M ₂		S ₂		K ₁		O ₁		M.L.
α°		012		000		180		192		
g°	H	008	0.94	060	0.42	215	0.23	162	0.14	2.35
A°	F	019	1.17	012	0.82	161	1.28	229	1.05	+0.2
α+g+A	H×F	039	1.100	072	0.344	196	0.294	223	0.147	2.55
		=m°	=M	=s°	=S	=k°	=K	=o°	=O	=A ₀

Mean level (Z₀)

Seasonal correction

ADD

logs:

1.9731
0.0682
0.0413

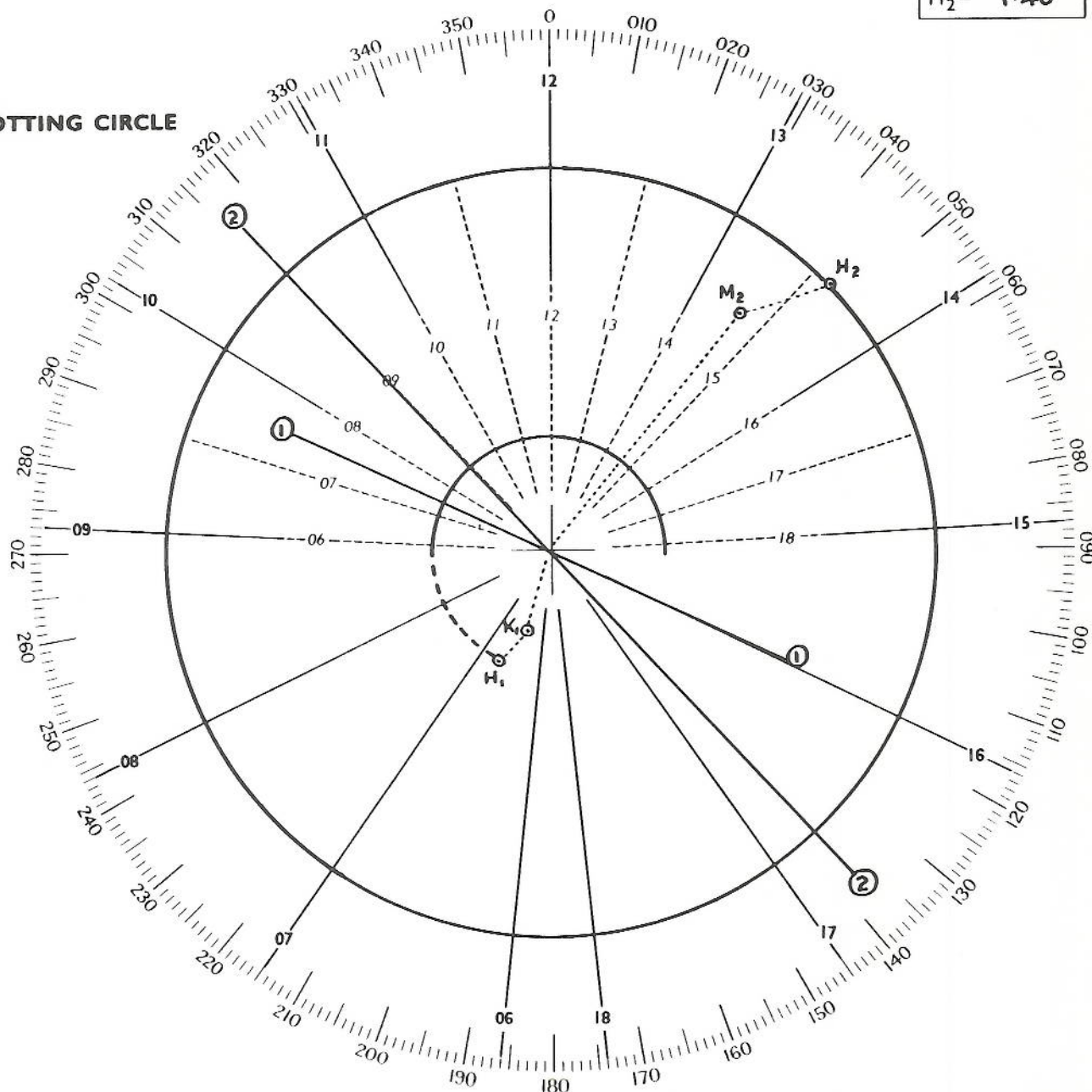
1.6232
1.9138
1.5370

1.3617
0.1072
1.4689

1.1461
0.0212
1.1673

h ₂ =	047
H ₂ =	1.40

PLOTTING CIRCLE

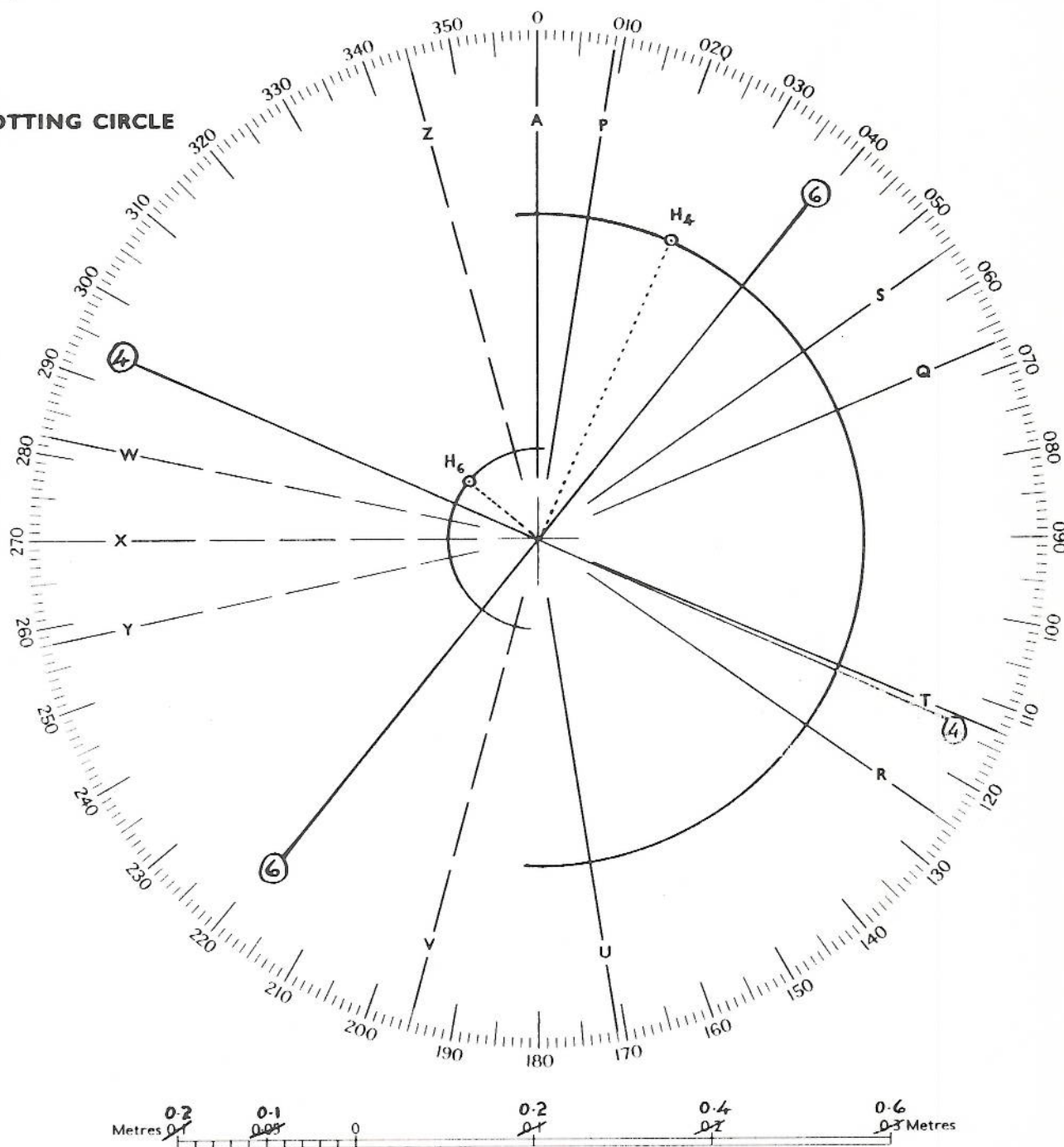


Metres 1.0 0.5 0 1.0 2.0 Metres

Place WU-SUNG K'OUDate 10 JULY 1975**FORM C**
[Example]Lat 31° 24' NLong 121° 30' EZone Time -0800**TABLE**

$h_2 = 047$	$2h_2 = 094$	$r_4 = 290$	$h_4 = r_4 + 2h_2 = 024$	$3h_2 = 141$	$r_6 = 168$	$h_6 = r_6 + 3h_2 = 309$
$H_2 = 1.40$	$H_2^2 = 1.960$	$F_4 = 0.185$	$H_4 = F_4 \times H_2^2 = 0.363$	$H_2^3 = 2.744$	$F_6 = 0.038$	$H_6 = F_6 \times H_2^3 = 0.101$

logs: 0.1461 0.2922 T.2672 T.5594 0.4383 T.5798 T.0181

PLOTTING CIRCLE**TABLE**

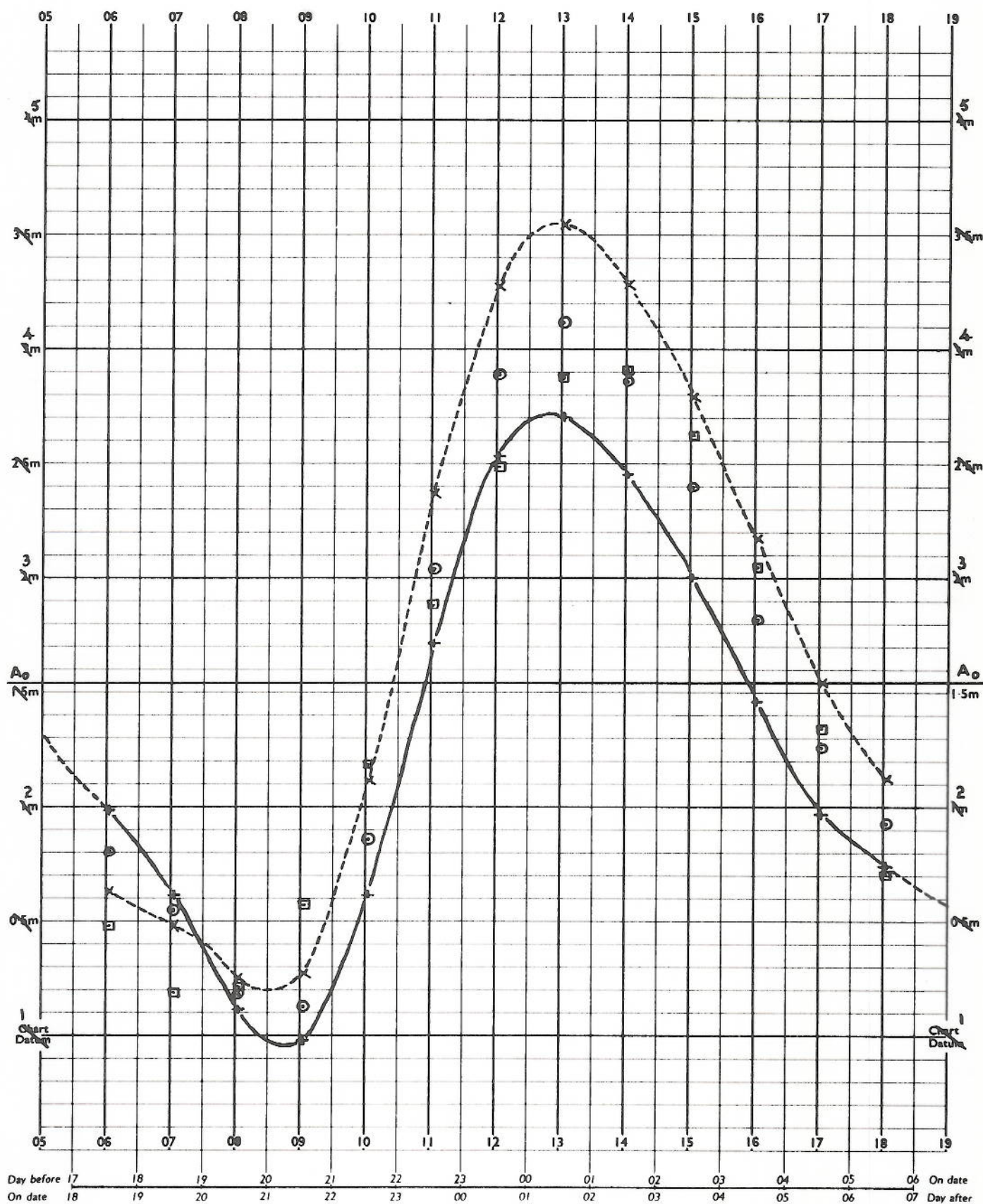
Time	0600	0700	0800	0900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800
QD	P ⁺ .350	Q ⁺ .266	R ⁻ .068	P ⁻ .350	Q ⁻ .266	R ⁺ .068	A ⁺ .336	S ⁺ .314	T ⁺ .010	U ⁻ .304	S ⁻ .314	T ⁻ .010	U ⁺ .304
6-D	V ⁻ .042	W ⁺ .088	V ⁺ .042	W ⁻ .088	A ⁻ .062	X ⁺ .080	A ⁺ .062	X ⁻ .080	A ⁻ .062	Y ⁺ .062	Z ⁺ .082	Y ⁻ .062	Z ⁻ .082
Sum	+ .308	+ .354	- .026	- .438	- .328	+ .148	+ .398	+ .234	- .052	- .242	- .232	- .072	+ .222

Figure 2

Place WU-SUNG K'OUDate 10 JULY 1975

FORM B

[Example]

Lat 31° 24' NLong 121° 30' EZone Time -0800

Times at top and bottom of main framework relate to continuous curve (drawn first)
Lower set of times (in italics) relate to pecked curve (drawn second).



Figure 3

La prédiction est étendue 12 heures avant et 12 heures après en constatant que :

$$\begin{aligned}h_{SD}(t) &\approx h_{SD}(t \pm 12,5) \\h_{4D}(t) &\approx h_{4D}(t \pm 12,5) \\h_{6D}(t) &\approx h_{6D}(t \pm 12,5) \\h_D(t) &\approx -h_D(t \pm 12,5)\end{aligned}$$

En portant la contribution de l'espèce diurne à l'heure n du jour J dans le sens opposé, on obtient la hauteur à l'heure $n + 12,5$ et à l'heure $n - 12,5$. La courbe correspondante est tracée en tireté et correspond à l'échelle inférieure des heures (figure 3).

Les résultats obtenus avec cette méthode sont améliorés par l'emploi d'un calculateur de poche. Il est possible d'utiliser alors les vitesses individuelles des ondes. La prévision est améliorée de 1 à 2 décimètres mais c'est surtout le gain de temps qui est alors appréciable. Les formules à employer sont les suivantes :

$$h_{SD}(t) = M \cos(q_{M_2}(t - 12) - m) + S \cos(q_{S_2}(t - 12) - s)$$

$$h_d(t) = K \cos(q_{K_1}(t - 12) - k) + O \cos(q_{O_1}(t - 12) - o)$$

$$h_{4D}(t) = F_4 \left\{ M^2 \cos(2q_{M_2}(t - 12) - 2m - f_4) + 2MS \cos((q_{M_2} + q_{S_2})(t - 12) - s - m - f_4) + S^2 \cos(2q_{S_2}(t - 12) - 2s - f_4) \right\}$$

$$h_{6D}(t) = F_6 \left\{ M^3 \cos(3q_{M_2}(t - 12) - 3m - f_6) + 3M^2S \cos((2q_{M_2} + q_{S_2})(t - 12) - 2m - s - f_6) + 3MS^2 \cos((q_{M_2} + 2q_{S_2})(t - 12) - m - 2s - f_6) + S^3 \cos(3q_{S_2}(t - 12) - 3s - f_6) \right\}$$

3.1.2 - Méthode de l'annuaire allemand

L'annuaire allemand donne, pour certains ports, les constantes harmoniques A_i (cm) et P_i (degrés) des ondes M_2 , S_2 , N_2 , K_2 , μ_2 , K_1 , O_1 , P_1 , M_4 et MS_4 . Les amplitudes sont identifiées par un numéro de 1 (M_2) à 10 (MS_4) et les phases par un numéro de 11 (M_2) à 20 (MS_4). Le niveau moyen Z_0 est parfois accompagné de ses variations mensuelles.

L'argument astronomique de chaque onde est décomposé en :

$$V_i = P_i + k_i t + T_i$$

où T_i est donné à 0 h 00 de chaque jour de l'année dans un tableau aux colonnes numérotées de 21 (M_2) à 30 (MS_u). $k_i t$ est donné de 10 en 10 min de 0 à 24 h dans un tableau aux colonnes numérotées de 31 à 40. La hauteur d'eau à l'instant t est calculée avec la formule :

$$h(t) = Z_0 + \sum_{i=1}^{10} A_i \cos(P_i + k_i t + T_i) = Z_0 + \sum_{i=1}^{10} A_i \cos \varphi_i$$

Les calculs sont disposés dans un tableau du type de celui ci-dessous. On reporte en colonnes A et B les quantités $A_i \cos \varphi_i$ suivant qu'elles sont négatives ou positives.

Tableau 2

Méthode de l'annuaire allemand - Disposition des calculs

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-	Z_0	A_1									
1			P_1									
2			T_1									
3			$k_1 t$									
4												
5												
6			φ_i									
7			Port Fuseau horaire Date heure Hauteur : B - A (cm)									
8												
9												
10												
Σ	A	B										

I Z_0 et A_i (0 à 10)

II P_i (11 à 20)

III T_i (21 à 30)

IV $k_i t$ (31 à 40)

V $P_i + T_i + k_i t = \varphi_i$

VI $n \times 360^\circ$

VII φ_i compris entre 0 et 360°

3.2 - Méthode de la sinusoïde

Cette méthode consiste à assimiler, entre une pleine mer et une basse mer, la courbe de marée à une sinusoïde.

Soit H la hauteur de la pleine mer, h celle de la basse mer et T l'intervalle de temps qui les sépare. L'équation de la sinusoïde correspondante est :

$$y = \frac{H + h}{2} + \frac{H - h}{2} \cos \frac{\pi t_1}{T}$$

ou
$$y = \frac{H + h}{2} - \frac{H - h}{2} \cos \frac{\pi t_2}{T}$$

les temps t_1 et t_2 étant comptés respectivement à partir de la pleine mer et de la basse mer (figure 4).

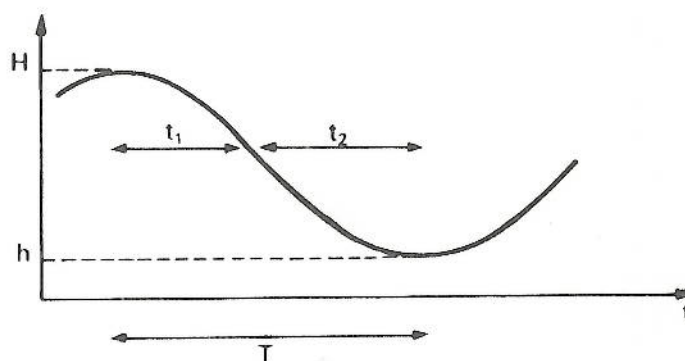


Figure 4

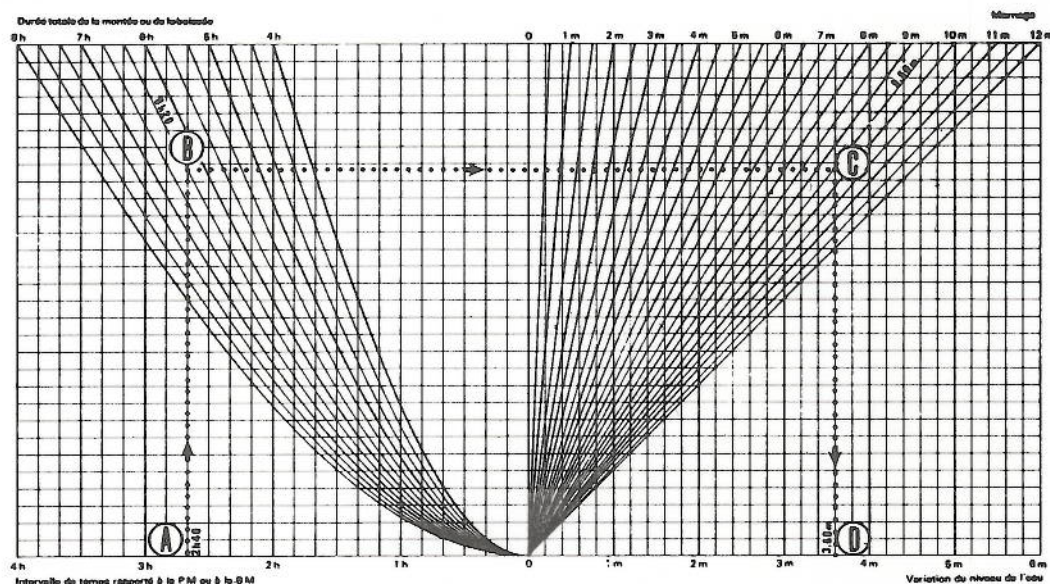
La baissée par rapport à la pleine mer est :

$$H - y = (H - h) \sin^2 \frac{\pi t_1}{2T}$$

La montée par rapport à la basse mer est :

$$y - h = (H - h) \sin^2 \frac{\pi t_2}{2T}$$

Ces relations sont tabulées en fonction de T et $H - h$ ou sont traduites par un abaque. On donne les valeurs de $k = \sin^2 \frac{\pi t}{2T}$ en fonction de t et T et les valeurs de $H - y$ ou $y - h$ en fonction de k et $H - h$ (figure 5).



Trouver la hauteur de la marée à 21 h 00 (UT + 1 h) en un lieu où les éléments sont :

	Heure (UT + 1 h)	Hauteur
Pleine mer	17 h 20 mn	10,05 m
Basse mer	23 h 40 mn	0,55 m

L'instant considéré étant plus proche de celui de la basse mer que de celui de la pleine mer, l'instant de référence sera celui de la basse mer.

L'instant considéré se situe :

$23 \text{ h } 40 \text{ mn} - 21 \text{ h } 00 \text{ mn} = 2 \text{ h } 40 \text{ mn}$ avant la basse mer, d'où le point A.

La durée de la baissée est de $23 \text{ h } 40 \text{ mn} - 17 \text{ h } 20 \text{ mn} = 6 \text{ h } 20 \text{ mn}$ d'où le point B.

Le marnage est de $10,05 \text{ m} - 0,55 \text{ m} = 9,50 \text{ m}$ d'où le point C, puis le point D.

Le point D correspond à 3,60 m.

La hauteur cherchée est donc $0,55 \text{ m} + 3,60 \text{ m} = 4,15 \text{ m}$.

Figure 5

La règle des douzièmes fournit un moyen simple de calcul dont les résultats sont assez voisins de ceux obtenus par la méthode de la sinusoïde. On considère que la mer monte de :

- un douzième du marnage pendant le premier sixième de la durée de la montée
- deux douzièmes de marnage pendant le deuxième sixième de la durée de la montée
- trois douzièmes de marnage pendant le troisième sixième de la durée de la montée
- trois douzièmes de marnage pendant le quatrième sixième de la durée de la montée
- deux douzièmes de marnage pendant le cinquième sixième de la durée de la montée
- un douzième du marnage pendant le dernier sixième de la durée de la montée.

La mer descend de la même façon au cours de la baissée. Le tableau 3 montre la ressemblance entre cette règle et la méthode de la sinusoïde.

Tableau 3

Comparaison de la règle des douzièmes et de la méthode de la sinusoïde

Durée (en fraction de la durée de la montée ou de la baissée)	Variation du niveau (en fraction du marnage)	
	Sinusoïde	Règle des douzièmes
Premier sixième	0.067	0.083
Deuxième sixième	0.250	0.250
Troisième sixième	0.500	0.500
Quatrième sixième	0.750	0.750
Cinquième sixième	0.933	0.917
Dernier sixième	1.000	1.000

3.3 - Courbes types

La courbe de marée, qui représente la superposition de plusieurs ondes de vitesses angulaires variables, s'écarte souvent de la sinusoïde mais pour un port à marée semi-diurne, l'allure générale de la courbe reste la même ou varie lentement avec le marnage. Cette constatation est à l'origine de l'établissement de courbes types obtenues en divisant la variation de niveau par le marnage et l'intervalle de temps à partir de la pleine mer ou de la basse mer par la durée de la montée ou de la baissée. En moyennant les courbes individuelles correspondant à divers marnages, on obtient une courbe unique qui peut remplacer la sinusoïde pour un calcul plus précis des hauteurs instantanées. Cependant, pour rendre compte de la dispersion du faisceau de courbes adimensionnelles, on préfère conserver les deux courbes correspondant aux vive-eau et morte-eau moyennes.

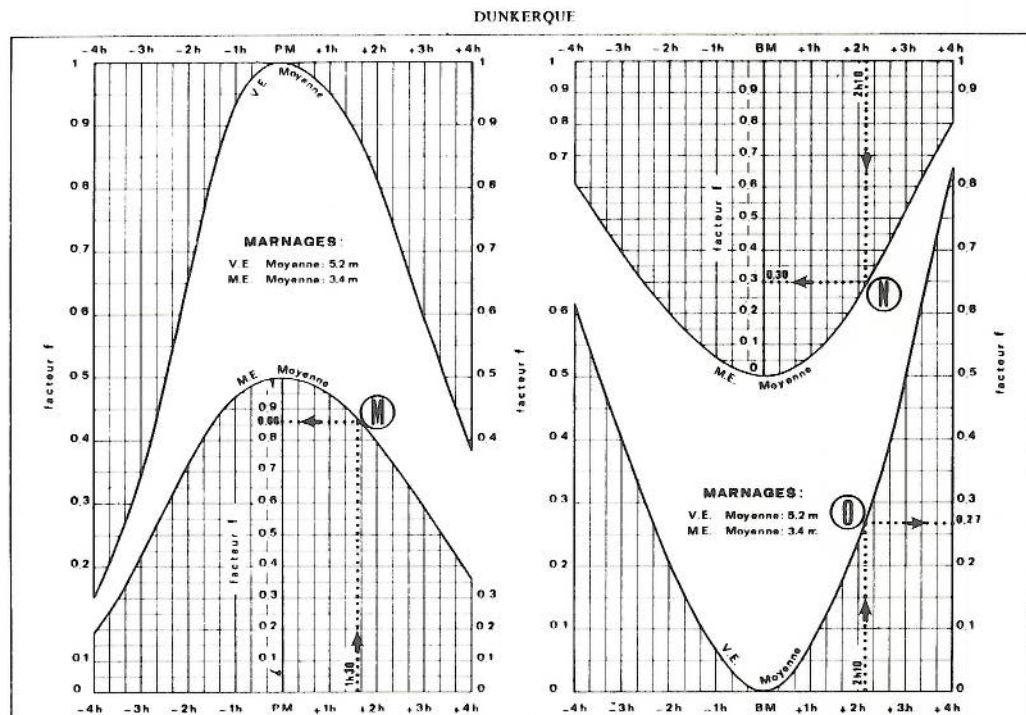
Les courbes types des ports principaux ont été introduites dans l'annuaire des marées des ports de France à partir de l'édition pour 1978. La hauteur instantanée est calculée par la relation :

$$h(t) = h_{BM} + f(h_{PM} - h_{BM})$$

Les courbes types (figure 6) représentent les variations du facteur f en fonction de l'intervalle de temps rapporté à la pleine mer ou à la basse mer la plus proche, pour les vive-eau et morte-eau moyennes. On adopte l'une ou l'autre valeur selon que le marnage est plus proche du marnage de la vive-eau ou de la morte-eau moyenne. Dans les cas intermédiaires on prend la moyenne des deux valeurs de f . Il est même possible d'interpoler linéairement en fonction du marnage mais le gain en précision est faible car f varie lentement avec le marnage.

Les "Admiralty Tide Tables" donnent seulement les courbes types rapportées à la pleine mer, ce qui réduit un peu la précision pour les instants plus proches de la basse mer que de la pleine mer. Lorsque l'un des extrêmes est mal défini (la pleine mer au Havre, par exemple), l'annuaire des ports de France ne donne que les courbes types relatives à l'autre extrême.

L'usage des courbes types améliore sensiblement la prédiction des hauteurs instantanées par rapport à la méthode de la sinusoïde. C'est d'autant plus vrai que la courbe de marée du lieu considéré présente des dissymétries plus marquées par rapport à l'instant de la pleine mer ou de la basse mer.



Trouver la hauteur de la marée à 9 h 00 (UT+ 1 h) à Dunkerque lorsque les éléments sont :

	Heure (UT+ 1 h)	Hauteur
Basse mer	6 h 50 mn	0,95 m
Pleine mer	12 h 14 mn	5,35 m

L'instant considéré étant plus proche de celui de la basse mer que de celui de la pleine mer, l'instant de référence sera celui de la basse mer. L'instant considéré se situe à :

9 h 00 mn - 6 h 50 mn = 2 h 10 mn après la basse mer.

Le marnage est : 5,35 m - 0,95 m = 4,40 m.

Nous sommes en marée moyenne et lisons :

- sur la courbe M.E. moyenne, 2 h 10 mn après la basse mer, un facteur f égal à 0,30 (point N).
- sur la courbe V.E. moyenne, 2 h 10 mn après la basse mer, un facteur f égal à 0,27 (point O).

Le facteur à utiliser est : $\frac{0,30 + 0,27}{2} = 0,285$.

Nous multiplions cette valeur par le marnage $4,4 \text{ m} \times 0,285 = 1,25 \text{ m}$

et nous ajoutons ce résultat à la hauteur de la basse mer $0,95 \text{ m} + 1,25 \text{ m} = 2,20 \text{ m}$.

La hauteur cherchée est donc 2,20 m.

Figure 6

3.4 - Tables permanentes

Le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine publie, depuis 1957, une "Table permanente des hauteurs d'eau" qui permet, pour un certain nombre de ports des côtes européennes de la Mer du Nord, de la Manche et de l'Atlantique, la détermination de la hauteur d'eau à un instant quelconque, à partir des éléments de la pleine mer ou de la basse mer la plus proche, soit à BREST, soit au port considéré.

L'édition actuelle de cette table (ouvrage n° 530) a été publiée à partir de 1976. Elle a été établie à l'aide des méthodes d'analyse des courbes de marée par concordance décrites au chapitre IX (cf § 2.4).

L'ouvrage comporte une double page pour chaque port, chacune des pages comportant elle-même un tableau central encadré en haut et en bas de deux tables de concordance. Le tableau central est affecté à la marée montante (page de gauche) ou à la marée descendante (page de droite). Il contient les hauteurs d'eau instantanées pour des hauteurs de pleine mer ou de basse mer espacées de 25 en 25 cm et pour des instants espacés de 10 en 10 min, comptés à partir de l'heure de la pleine mer ou de la basse mer. Les intervalles de temps considérés s'étendent en principe jusqu'à 3 h 50 min de part et d'autre des extrémums, ce qui assure un recouvrement suffisant. Dans certains cas, pour que la prédiction soit plus avantageuse au point de vue de la précision, les parties relatives à un extrémum sont réduites, voire supprimées, au profit des parties relatives à l'autre extrémum qui sont étendues en conséquence. Le calcul de la hauteur à un instant quelconque s'effectue par double interpolation entre les heures et entre les hauteurs de pleine ou de basse mer encadrant la valeur considérée. Les tables de concordance en heure et en hauteur de pleines et basses mers permettent de déterminer les éléments des pleines et basses mers au port considéré à partir des éléments analogues prédits pour BREST.

CHAPITRE XII

NIVEAUX CARACTERISTIQUES ET REDUCTION DES SONDES

1 - GENERALITES

Des considérations pratiques conduisent à représenter le mouvement de la surface de la mer, à l'aide de niveaux caractéristiques définis simplement et rapportés à des repères matériels durables.

Le niveau moyen de la mer, moyenne sur une certaine période de la hauteur d'eau mesurée par rapport à un repère fixe, est utilisé pour la définition des altitudes terrestres. L'étude de sa détermination et de ses variations fait l'objet du chapitre suivant. On lui préfère parfois le niveau de mi-marée qui est la moyenne des hauteurs des pleines et basses mers. Ce niveau est distinct du niveau moyen déterminé sur la même période en raison des déformations de la courbe de marée sous l'effet des ondes supérieures et composées (voir chapitre VII, § 4).

Les hauteurs moyennes des pleines mers et des basses mers de vive-eau et de morte-eau permettent de caractériser sommairement la marée d'un port (voir chapitre VII, § 5).

La profondeur d'eau mesurée en un point varie en fonction du temps. Pour séparer une partie constante portée sur les cartes et une partie variable faisant l'objet de prédictions, il est nécessaire de choisir un niveau de référence commun aux sondes des cartes marines et aux hauteurs de marée prédites dans les annuaires. Pour des raisons de sécurité, on adopte comme niveau de référence un niveau de basse mer, mais sa définition exacte diffère selon les pays.

La connaissance du niveau des plus basses mers et des plus hautes mers est également utile pour la construction et la protection des ouvrages côtiers. Il faut alors tenir compte des perturbations accidentelles du niveau de la mer qui peuvent être importantes. Le niveau des plus hautes mers sert en outre à définir le trait de côte et à délimiter le domaine maritime.

2 - NIVEAUX EXTREMES DE LA MAREE

Les niveaux extrêmes de la marée en un point peuvent être déterminés soit directement par des observations de très longue durée soit indirectement, par concordance avec un point voisin où les niveaux extrêmes sont connus, ou par le calcul à partir des formules de prédiction.

2.1 - Détermination directe

Un intervalle de temps compris entre 18 et 19 ans constitue une période approchée du mouvement des astres et de la marée (voir chapitre XI, § 2.2). La détermination directe des niveaux extrêmes de la marée nécessite donc l'obtention d'une très longue série d'observations portant si possible sur 18 ou 19 ans.

On peut alors définir les niveaux de pleine mer et de basse mer extrêmes en relevant systématiquement et successivement :

- les niveaux extrêmes journaliers ;
- les niveaux extrêmes de vive-eau ;
- les niveaux extrêmes annuels.

La construction des histogrammes relatifs à ces deux dernières séries permet d'estimer les niveaux extrêmes. Pour réduire l'effet des perturbations accidentelles du niveau de la mer, on pourra remplacer la marée observée, après analyse, par la marée prédite.

2.2 - Déterminations indirectes

On dispose rarement de séries d'observations très longues pour pouvoir appliquer la méthode précédente qui nécessiterait des délais prohibitifs. Diverses méthodes indirectes sont envisageables pour le traitement des séries plus courtes. Leur précision est d'autant meilleure que les séries d'observation utilisées sont néanmoins suffisamment longues pour qu'on puisse éliminer les perturbations accidentelles du niveau de la mer.

2.2.1 - Détermination par concordance

Supposons que la marée au point étudié soit en concordance avec la marée d'un port de référence pour lequel les niveaux extrêmes sont connus. Il suffit alors de déterminer, suivant la technique indiquée au chapitre IX,

la courbe de concordance en hauteur. Les niveaux extrêmes sont déterminés, par extrapolation de la courbe, en concordance avec les niveaux extrêmes du port de référence. Le résultat est d'autant plus précis que la courbe est mieux définie à ses extrémités, c'est-à-dire que les séries d'observations sont plus longues.

2.2.2 - Détermination par la formule de LAPLACE

Rappelons que cette formule n'est valable que pour les ports à marée semi-diurne prépondérante. Les hauteurs des pleines et basses mers de vive-eau ont pour expression :

$$\begin{cases} h_{BMVE} = N - (B_{21} i_1^3 \cos^2 \delta_1 + B_{22} i_2^3 \cos^2 \delta_2) \\ h_{PMVE} = N + (B_{21} i_1^3 \cos^2 \delta_1 + B_{22} i_2^3 \cos^2 \delta_2) \end{cases}$$

en prenant pour N le niveau de mi-marée, afin de tenir compte en partie des ondes supérieures et composées.

Les valeurs extrêmes des coefficients astronomiques ont été indiquées au chapitre V (cf § 3.3). Elles correspondent à un instant voisin des équinoxes avec la lune périgée. Les niveaux extrêmes correspondants sont :

$$\begin{cases} h_{BME} = N - 1,19 B_{21} - 1,01 B_{22} \\ h_{PME} = N + 1,19 B_{21} + 1,01 B_{22} \end{cases}$$

Pour les ports français, on utilise encore le coefficient et l'unité de hauteur, ce qui donne les formules :

$$\begin{cases} h_{BME} = N - 1,20 U \\ h_{PME} = N + 1,20 U \end{cases}$$

Ainsi, pour BREST :

$$N = 4,45 \text{ m}$$

$$U = 3,21 \text{ m}$$

$$\begin{cases} h_{BME} = 0,60 \text{ m} \\ h_{PME} = 8,30 \text{ m} \end{cases}$$

On obtient des valeurs plus proches des valeurs extrêmes relevées dans l'Annuaire des marées (respectivement 0,45 m et 8,25 m) en introduisant les ondes à longue période qui modifient la valeur du niveau de mi-marée journalier.

2.2.3 - Détermination par la formule harmonique

La hauteur de la marée a pour expression en fonction du temps :

$$h(t) = Z_o + \sum_{i=1}^n f_i H_i \cos \varphi_i$$

où Z_o est le niveau moyen

H_i l'amplitude de l'onde i

f_i le facteur nodal de l'onde i (fonction essentiellement de N' et accessoirement de p et p_1)

φ_i phase de l'onde i , fonction linéaire du vecteur $\vec{x}$ de composantes (τ, s, h, p)

$$\varphi_i = a_i \tau + b_i s + c_i h + d_i p - g_i \quad (\text{en négligeant la correction nodale})$$

Les périodes des variables astronomiques étant incommensurables, toute valeur du vecteur $\vec{x}$ peut être atteinte sur un intervalle de temps infini. La hauteur h est une fonction $\psi(\vec{x})$ périodique et de période 2π par rapport à chacune des composantes de $\vec{x}$. Les niveaux extrêmes sont caractérisés par :

$$\text{grad } \psi = 0$$

$$\text{soit } \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial h} = \frac{\partial \psi}{\partial p} = 0$$

Le caractère transcendant de la fonction ψ ne permet pas de résoudre ce problème de façon simple.

Une première estimation des niveaux extrêmes est obtenue en faisant la somme des amplitudes des ondes :

$$h_{BME} \approx Z_o - \sum_{i=1}^n f_i H_i$$

$$h_{PME} \approx Z_o + \sum_{i=1}^n f_i H_i$$

On utilisera, dans ces formules, la combinaison des facteurs nodaux, c'est-à-dire la combinaison des variables N' , p et p_1 dont ils dépendent, qui donne les valeurs extrêmes. En pratique cela se réduit à choisir entre $N' = 0$ et $N' = 180^\circ$, selon les ondes les plus importantes. Mais, en réalité, les phases des ondes ne sont pas indépendantes et toutes les ondes ne peuvent pas être en phase simultanément : les niveaux ainsi calculés ne sont pas atteints.

Une autre méthode plus réaliste, mais toujours approchée, consiste à classer les ondes dans l'ordre des amplitudes décroissantes puis à déterminer la valeur du vecteur $\vec{x}$ qui assure la conjonction des extrêmes des ondes les plus importantes. Il suffit ensuite de calculer la hauteur correspondante en tenant compte de toutes les ondes et en choisissant la valeur de N' qui donne les valeurs extrêmes. Remarquons que la hauteur ainsi calculée n'est pas, en général, un extrême de la courbe de marée et les niveaux ainsi calculés peuvent être dépassés.

Considérons par exemple la marée de BREST. Les quatre ondes les plus importantes sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

Tableau n° 1

Ondes prépondérantes à BREST

Nom	Phase astronomique	Amplitude (cm)	Facteur nodal	
			$N' = 0^\circ$	$N' = 180^\circ$
M_2	2τ	204	0,963	1,038
S_2	$2\tau + 2s - 2h$	75	1,000	1,000
N_2	$2\tau - s + p$	41	0,963	1,038
K_2	$2\tau + 2s$	21	1,317	0,748

La conjonction des basses mers de ces quatre ondes correspond à la combinaison :

$$\tau_0 = \frac{1}{2} g_{M_2} + (k_1 + \frac{1}{2}) \pi$$

$$s_o = \frac{1}{2} (g_{K_2} - g_{M_2}) + (k_2 - k_1) \pi$$

$$h_o = \frac{1}{2} (g_{K_2} - g_{S_2}) + (k_2 - k_3) \pi$$

$$p_o = \frac{1}{2} (2g_{N_2} + g_{K_2} - 3g_{M_2}) + (2k_4 - 3k_1 + k_2) \pi$$

où k_1, k_2, k_3, k_4 sont des entiers.

La valeur extrême est obtenue pour :

$$N'_o = 180^\circ$$

Une estimation du niveau de basse mer extrême est donnée par la formule :

$$h_{BME} \approx Z_o - 1,038 H_{M_2} - H_{S_2} - 1,038 H_{N_2} - 0,748 H_{K_2} - \dots\dots\dots$$

dans laquelle la contribution des autres ondes est calculée pour la valeur $\vec{x}_o$ de $\vec{x}$. On choisit pour chaque coefficient k_i la valeur 0 ou 1 qui donne le niveau extrême.

On trouve ainsi pour BREST, avec les quatre ondes principales :

$$h_{BME} \approx 1,07 \text{ m (au lieu de 0,45 m)}$$

$$h_{PME} \approx 7,97 \text{ m (au lieu de 8,25 m)}$$

Les résultats sont un peu meilleurs si on tient compte de toutes les ondes mais restent à quelques décimètres de la réalité.

Le calcul exact des niveaux extrêmes à partir de la formule harmonique est possible par des techniques numériques. On peut, par exemple, prédire les hauteurs des pleines et basses mers sur un cycle de 19 ans et extraire les valeurs extrêmes. Mais cette méthode est évidemment d'un emploi très lourd : il vaut mieux chercher à réduire notablement le nombre de hauteurs à calculer. Ceci est possible si on connaît la date à laquelle les niveaux extrêmes ont été atteints en un port voisin où la marée est semblable : on ne fera la prédiction complète qu'au voisinage de cette date.

Dans le cas général, les techniques de programmation non linéaires fournissent une solution économique au problème. La difficulté consiste à choisir une première approximation assez "bonne" pour garantir la convergence du procédé vers la valeur cherchée et non vers un extrémum local.

Il semble judicieux de choisir comme point de départ l'extrémum voisin de l'instant qui assure la conjonction des extrémums des ondes les plus importantes. Les étapes du calcul s'organisent de la façon suivante :

- détermination de la valeur $\vec{x}_0$ qui assure la conjonction des extrémums des ondes les plus importantes ;
- détermination de la valeur $\vec{x}_1$ qui correspond à l'extrémum effectif de ψ le plus proche (en faisant varier τ entre $\tau_0 - \pi$ et $\tau_0 + \pi$) ;
- amélioration de l'estimation de la valeur de l'extrémum par itération.

On emploie à cet effet, par exemple, la méthode du gradient ou une de ses variantes. Soit $\vec{x}_{n-1}$ la valeur de $\vec{x}$ déterminée à l'itération $n-1$. La valeur $\vec{x}_n$ à l'itération suivante est :

$$\vec{x}_n = \vec{x}_{n-1} + \alpha_n \varepsilon \vec{\text{grad}} \psi (\vec{x}_{n-1})$$

avec $\varepsilon = +1$ (recherche du niveau de pleine mer extrême)
ou -1 (recherche du niveau de basse mer extrême)

On arrête le calcul lorsque :

$$|\vec{\text{grad}} \psi| < \beta$$

où β est un paramètre petit à définir. La vitesse de convergence dépend du choix de la suite des coefficients α_n .

3 - ZERO DES CARTES OU ZERO HYDROGRAPHIQUE

3.1 - Définition

On appelle zéro hydrographique ou zéro des cartes marines le niveau de référence à partir duquel sont comptées, positivement vers le bas, les sondes portées sur les cartes marines et, positivement vers le haut, les hauteurs d'eau déduites de l'usage des annuaires de marée. L'addition de la sonde et de la hauteur d'eau fournit la profondeur à une époque donnée. Le niveau de référence a donc un caractère conventionnel ; il importe seulement qu'il soit commun aux cartes marines et aux annuaires de marée. Néanmoins, le choix de ce niveau ne doit pas être entièrement arbitraire.

D'abord, il doit être choisi assez bas pour que le navigateur soit assuré de trouver le plus souvent une profondeur au moins égale à la sonde portée sur la carte et ne soit contraint de calculer la profondeur réelle ou de sonder, que lorsque le tirant d'eau du navire approche, par défaut, la sonde portée sur la carte. En outre, si le niveau de référence est choisi assez bas, les hauteurs de marée s'expriment le plus souvent par des nombres positifs et les risques d'erreur dans le calcul de la profondeur sont réduits.

Mais, un niveau choisi trop bas peut nuire à la fréquentation de certains ports ou entraîner l'exécution de travaux de dragage onéreux et inutiles en créant des zones qui paraîtront artificiellement malsaines aux navigateurs. Un niveau trop bas donne aussi une image fausse de la bathymétrie, ce qui peut nuire à la confiance accordée aux cartes : on peut ainsi faire apparaître des roches découvrantes qui en fait sont toujours recouvertes d'eau.

Enfin, le niveau adopté doit être défini de manière homogène sur la plus large zone possible pour éviter de créer un relief fictif aux frontières entre deux zones.

Ces considérations ont conduit les services hydrographiques à adopter comme zéro des cartes un certain niveau de basse mer mais il n'a pas encore été possible aux divers pays concernés d'en accepter une définition unique. La seule règle reconnue par l'Organisation Hydrographique Internationale stipule seulement :

"Il est décidé que le niveau de référence pour les marées sera le même que le niveau de référence pour les sondes sur les cartes et qu'il sera choisi assez bas pour que la mer ne descende que rarement au-dessous de lui".

C'est la signification précise donnée au mot "rarement" qui varie selon les pays. La définition du niveau de référence choisi est mentionnée sur les cartes.

Le zéro des cartes est défini pratiquement par sa cote par rapport à des repères terrestres durables, eux-mêmes rattachés au réseau de nivellement en service, de sorte qu'il puisse être retrouvé facilement. Normalement, sa détermination s'affine au fur et à mesure que se prolongent les observations de marée mais il arrive souvent que des considérations historiques ou pratiques fassent renoncer à toute modification. Le changement d'un zéro ancien présente en effet des inconvénients notables : il faut corriger les sondes et les annuaires de marée et plus généralement tous les documents qui s'y réfèrent, avec les risques d'erreur que cela comporte. Une telle opération ne doit être effectuée que rarement et avec la plus grande prudence. Le plus souvent, on préfère conserver le zéro traditionnel, même s'il a été mal choisi. C'est le cas du zéro de BREST situé 45 cm trop bas.

3.2 - Zéro hydrographique en France

Sur les cartes des côtes de France, des territoires ou anciens territoires français et des îles anglo-normandes, le zéro hydrographique est théoriquement le niveau de basse mer "astronomique" extrême. En fait, il est souvent situé légèrement en-dessous de ce niveau.

Le choix du zéro hydrographique est une opération dont la responsabilité incombe à l'Etablissement Principal du SHOM (EPSHOM). Pour la réaliser pratiquement et en assurer la cohérence géographique, on a défini, depuis 1964, des zones de marée à l'intérieur de laquelle les zéros hydrographiques des divers ports sont en concordance avec celui d'un port de référence. L'existence de zéros traditionnels bien conservés mais non concordants entre eux, qu'on ne peut modifier pour les raisons évoquées plus haut, a contraint à multiplier les zones de marée et les ports de référence, plus que ne l'aurait exigée la seule considération des variations du régime de la marée. Les renseignements correspondant aux limites des zones, aux ports de référence et au repérage du zéro hydrographique sont publiés dans un "Répertoire des zones de marée et des zéros hydrographiques".

3.3 - Zéro hydrographique des cartes étrangères

Les seules phénomènes qui peuvent faire descendre la mer au-dessous du niveau de référence adopté en France et dans les pays d'écologie française ont un caractère accidentel et exceptionnel : ondes de tempêtes, tsunamis, etc.

Certains pays étrangers considèrent que les marées astronomiques extrêmes sont elles-mêmes suffisamment rares et choisissent un niveau de référence supérieur au niveau de la plus basse mer astronomique. Ainsi, l'Allemagne utilise le niveau des basses mers moyennes de vive-eau (correspondant aux marées de coefficient 95 en France) tandis que les Etats-Unis adoptent le niveau moyen des basses mers inférieures de chaque jour.

La Grande-Bretagne, qui a entrepris depuis 1964 une opération de rationalisation de son zéro des cartes, utilise désormais un niveau voisin de celui de la basse mer astronomique extrême. Signalons aussi l'existence d'un niveau de référence dit de la basse mer de vive-eau des Indes (défini simplement par $Z_o - H_{M_2} - H_{S_2} - H_{K_1} - H_{O_1}$) employé par l'Australie, la Chine et le Japon.

Il est de règle internationale de conserver, dans la reproduction des cartes étrangères, le niveau de réduction adopté dans le pays d'origine. Il en résulte en particulier que les cartes françaises sont rapportées à des zéros qui diffèrent selon le pays représenté. On trouvera dans le "Guide du Navigateur" publié par le SHOM un tableau donnant les niveaux de référence adoptés sur les cartes étrangères.

4 - LA REDUCTION DES SONDES

4.1 - Le zéro des sondes

La définition du zéro hydrographique suppose l'acquisition d'une assez longue série d'observations de marée qui n'est pas toujours disponible au moment de l'exécution d'un levé. Pour ne pas retarder indûment la réduction des sondes, il est nécessaire de définir un niveau de référence "provisoire" appelé zéro des sondes et déterminé localement par la mission hydrographique qui effectue le levé. Ce zéro est le niveau de référence à partir duquel sont comptées, positivement vers le bas, les sondes portées sur la minute d'écriture et, positivement vers le haut, les hauteurs d'eau calculées à partir des observations de marée en certains points du levé. La différence entre la profondeur mesurée et cette hauteur d'eau calculée au même instant donne la sonde à porter sur les minutes. Le zéro des sondes est également repéré par sa cote par rapport à plusieurs repères matériels d'altitude.

Pour faciliter l'établissement ultérieur des cartes, il est préférable que le zéro des sondes soit confondu, chaque fois que cela est possible, avec le zéro hydrographique, ce qui permet de reporter le choix de sondes directement de la minute sur la carte.

Le zéro des sondes adopté doit être explicitement mentionné sur les minutes pour permettre éventuellement la correction des sondes lors d'un changement de zéro. Par convention internationale, et compte tenu de la précision des sondages, seules les profondeurs inférieures à 200 m sont, en principe, réduites de la marée.

Le choix du zéro des sondes, en accord avec la définition du zéro hydrographique, repose sur l'application de l'une ou l'autre des méthodes indiquées au § 2. Le plus souvent, il s'agit de choisir un niveau en concordance avec le zéro hydrographique connu du port de référence de la zone considérée. Il est donc indispensable d'observer la marée non seulement sur les lieux du levé et pendant les sondages mais aussi simultanément au port de référence et pendant une durée qui permette la détermination du zéro avec une précision suffisante. Il faut aussi tenir compte des travaux antérieurs ou de l'existence de niveaux de référence traditionnels bien repérés. Pour éviter des changements de zéro trop fréquents et abusifs compte tenu de la précision de leur détermination, les règles en vigueur au SHOM sont les suivantes :

1. Au cours d'un levé, où l'on observe la marée localement, on fera toujours une concordance entre la marée locale et la marée du port de référence de la zone.
2. Si le zéro local traditionnel est perdu, ou s'il n'a jamais existé, on déterminera un nouveau zéro en concordance avec celui du port de référence et on en assurera la conservation correcte (au moins trois repères durables par observatoire).

3. Si le zéro est retrouvé par des repères valables, on distinguera deux cas selon les résultats de la concordance avec le port de référence :
 - a) si l'écart entre le zéro ancien et le zéro en concordance est inférieur à 0,15 m, on conservera le zéro traditionnel,
 - b) si l'écart est égal ou supérieur à 0,15 m, le zéro sera alors en principe changé pour être mis en concordance avec celui du port de référence, mais seulement après accord de l'EPSHOM qui possède un historique des divers zéros utilisés localement et peut comparer les observations anciennes et nouvelles.

Lorsque plusieurs observatoires de marée sont utilisés pour un levé, il faut éviter les concordances "en cascade" dans la détermination des zéros. Chaque zéro est déterminé indépendamment en concordance avec celui du port de référence.

Dans le cas particulier des fleuves à marée, le niveau de réduction des sondes est en principe le plan horizontal passant par le zéro des sondes à l'embouchure. La seule exception à cette règle est le zéro de la Gironde dit "zéro d'étiage" défini en 1874 et conservé depuis dans tous les travaux du service hydrographique du port autonome de Bordeaux.

4.2 - Les levés côtiers

Lorsque le levé concerne une région peu étendue vers le large, on admet qu'il suffit d'observer la marée à la côte. Le nombre et l'implantation des observatoires de marée dépend des variations géographiques du régime de la marée que l'on peut estimer par des observations de courtes durées en divers points de la zone. La mise en place, le contrôle et l'entretien d'un marégraphe est une opération contraignante (voir chapitre II) et il faut éviter de multiplier inutilement les observations au détriment de la qualité des observations. En principe, une précision de l'ordre du décimètre sur la correction de marée est un critère suffisant pour définir l'espacement des marégraphes.

Si l'observatoire a déjà été utilisé, on commence par rechercher les repères laissés par les missions antérieures et dont la description et la cote sont données dans les rapports de mission et archivées à l'EPSHOM. Les cotes vont vérifiées par un nivellement géométrique au cours duquel sont rattachés le zéro de l'échelle et du marégraphe et les nouveaux repères éventuels. Si un réseau de nivellement existe, on s'y rattachera également.

Tous les repères anciens doivent être repris pour vérifier leur stabilité : un quai peut se tasser, une construction peut être déplacée. Si les repères anciens sont inexistantes ou paraissent ambigus et insuffisants, on les complète par des nouveaux repères de telle sorte d'avoir au moins trois repères de bonne qualité, facilement identifiables et pas trop rapprochés pour qu'ils ne risquent pas d'être tous détruits simultanément.

Des repères auxiliaires situés à proximité des appareils sont parfois utilisés pour la vérification de leur zéro au cours du levé. La description détaillée des repères, leur cote et la cote du zéro des sondes choisi sont indiquées sur la fiche d'observatoire et reprises dans le rapport de mission.

Le niveau de réduction des sondes et la surface instantanée de la mer sont assimilés à deux plans horizontaux dans une région d'une certaine étendue au voisinage de l'observatoire. On réduit les mesures de profondeur en leur retranchant la hauteur de marée observée au marégraphe, au même instant, comptée au-dessus du zéro des sondes. La zone d'utilisation de l'observatoire dépend de la précision cherchée et des variations du régime de la marée. Lorsque la configuration de la côte et les moyens de la mission ne permettent pas l'installation d'un nombre suffisant d'observatoires pour assurer le recouvrement de leurs zones d'utilisation, on a recours à des formules d'interpolation discrètes (traitement manuel) ou continues (traitement automatique, voir § 4.3) basées sur une combinaison des différentes marées observées et représentant la variation progressive du régime de la marée (figure 1). Les formules employées doivent figurer sur les minutes d'écriture.

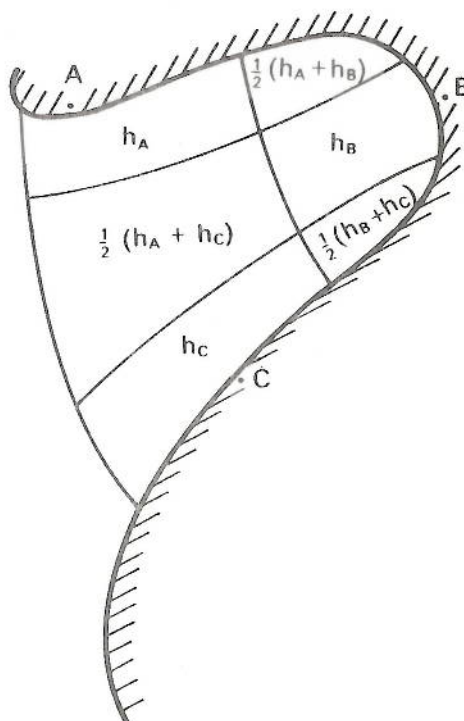


Figure 1 — Réduction des sondes

4.3 - Sondages au large

Lorsque la zone à lever s'étend au large mais que les profondeurs restent moyennes (inférieures à 200 m), le nombre de points d'observation de la marée nécessaire à une détermination assez précise de la marée devient parfois prohibitif. D'ailleurs les missions ne possèdent pas toujours l'équipement nécessaire aux observations au large dont la mise en oeuvre n'est pas encore du domaine de la routine. Les sondes sont donc en général réduites à l'aide d'une formule plus ou moins complexe utilisant la marée observée en un ou plusieurs ports de référence et dont la validité est contrôlée à l'aide d'observations in situ (avec un marégraphe immergé ou avec un navire au mouillage sondant en permanence) et par comparaison des sondes déterminées à l'intersection de profils croisés. Les incertitudes de cette dernière méthode, liées à la technique de sondage, à la forme du fond et à la localisation ne permettent le plus souvent que de détecter les anomalies flagrantes.

La réduction manuelle des sondes est alors une opération fastidieuse et on a recours à des méthodes automatiques. Différents types de formules sont envisageables. Schématiquement, elles correspondent à la combinaison de trois fonctions :

- une fonction de la position représentant la forme de la surface de la mer (ou la forme de la surface fictive correspondant à chacune des ondes composant la marée) à un instant donné,
- une fonction du temps représentant la courbe de marée observée au port de référence (définie par une formule d'interpolation ou d'approximation des hauteurs horaires),
- une fonction (éventuellement constante) permettant de caler la surface instantanée et qui traduit le choix du zéro des sondes.

Deux modèles sont couramment employés. Le premier est assez simple et traite la marée globalement. La formule de calcul de la hauteur instantanée en un point de coordonnées (X_1, X_2) (coordonnées géographiques ou en projection) est :

$$h(t, X_1, X_2) = A(X_1, X_2) \left[h_R(t - B(X_1, X_2)) \right] + C(X_1, X_2)$$

A et B sont des fonctions (polynomiales par exemple) déterminées à l'aide de cartes de lignes cotidales et d'isomarnage et h_R est la hauteur observée au port de référence. Le décalage $C(X_1, X_2)$ est constant si les zéros des sondes sont partout en concordance ; il est nul s'ils sont en concordance avec le zéro hydrographique du port de référence.

Ce modèle suppose que les marées sont semblables en tout point de la zone levée, ce qui n'est pas toujours une approximation suffisante. On peut alors faire dépendre les coefficients A et B du marnage (ou du coefficient) au port de référence ou, de manière plus rationnelle, traiter chaque onde séparément. On choisit, à partir d'un modèle numérique, une formule permettant de calculer les constantes harmoniques en un point quelconque. Soit h_0 la marée prédite par rapport au niveau moyen, en faisant la somme des contributions de chaque onde. La hauteur utilisée pour la réduction des sondes est :

$$h(t, X_1, X_2) = Z_0(X_1, X_2) + h_0(t, X_1, X_2) + h_R(t) - (h_{OR}(t) + Z_{OR})$$

où h_R et $(h_{OR} + Z_{OR})$ sont respectivement les marées observées et prédites au port de référence, par rapport au zéro hydrographique. Le niveau moyen Z_0 correspond au choix du zéro des sondes. Si les zéros doivent être concordants, on le détermine en écrivant que les hauteurs d'eau sont nulles simultanément au point considéré et au port de référence.

La correction $h_R(t) - (h_{OR}(t) + Z_{OR})$ représente la correction due aux effets météorologiques et aux ondes négligées, supposée constante sur l'ensemble de la zone relative au port de référence choisi.

Il est indispensable de préciser sur les minutes et dans le rapport de mission le procédé de réduction des sondes. Ces renseignements sont importants lors de l'étude des mouvements de fond à partir de levés successifs. Des divergences un peu trop grandes entre le mode de réduction employé aux diverses époques risqueraient de fausser les conclusions de telles études.

4.4 - Exécution des sondages

Lorsque la zone à lever est affectée d'une marée de marnage assez faible, les sondages peuvent être effectués sans se préoccuper de l'état de la marée. Les variations du niveau de la mer sont suffisamment lentes pour que les erreurs sur l'heure ou sur la position et les approximations du modèle de propagation de la marée n'entraînent pas d'erreur excessive sur les sondes.

Mais, dans certains cas, la vitesse de variation du niveau de l'eau peut devenir importante (plus de 50 cm en 10 min à Saint-Malo pour les marées de vive-eau) et les corrections de marée adoptées risquent d'être largement erronées, même pour un découpage en zones de marée soigné ou pour un modèle bien étalonné. Il faut alors s'astreindre à n'effectuer les sondages qu'aux périodes de variations moins rapides du niveau c'est-à-dire au voisinage des basses mers et des pleines mers de morte-eau. Cette restriction n'est pas toujours strictement applicable lorsque les impératifs de rendement deviennent prioritaires et la précision du levé s'en ressent. Les basses mers de vive-eau sont, elles, favorables à la détection des hauts-fonds qui sont alors couverts de peu d'eau.

Lorsqu'on réduit les sondages de la marée observée en un point de la côte, on suppose implicitement que la surface instantanée de la mer et la surface de référence sont parallèles. Cette hypothèse est justifiée lorsque le liquide est toujours dans un état proche du repos ou du mouvement uniforme et stationnaire. Si le régime des courants de marée est variable et complexe (cas des zones à bathymétrie tourmentée et à forts courants), les déformations relatives de ces deux surfaces ne sont plus négligeables. Il n'est d'ailleurs pas facile de les évaluer facilement sans observations de marée locale.

Les imperfections de la méthode de réduction de la marée se manifestent par l'apparition d'un relief artificiel sur la minute d'écriture entre des profils adjacents effectués à des états différents de la marée (phénomène de "doigts de gant") ou par des écarts entre les sondes obtenues à des époques différentes en des points bien identifiés (hauts-fonds remarquables). Mais ces anomalies peuvent avoir d'autres origines (emploi de sondeurs différents ; état de la mer ; localisation ; etc.) et l'identification des erreurs commises n'est pas toujours chose simple.

CHAPITRE XIII

LE NIVEAU MOYEN

1 - DEFINITION

La hauteur $h(t)$ du niveau de la mer, en un lieu donné, se décompose en une somme de termes de deux types :

- a) des termes périodiques d'origine astronomique directe (termes issus de potentiel générateur de la marée) ou indirecte (ondes de petits fonds) ; leurs périodes sont parfaitement connues.
- b) des termes d'origines diverses, en particulier météorologique, qui sont apériodiques ou en tous cas dont les périodes sont mal connues.

Les termes a constituent la marée, proprement dite ; les termes b représentent des variations "accidentelles" du niveau de la mer. En particulier, ils ne peuvent pas, contrairement aux termes a, faire l'objet d'une prédiction précise.

Si on retranche à la hauteur observée à un instant donné la marée proprement dite calculée au même instant, on obtient un résidu fonction du temps, appelé niveau moyen instantané. La valeur moyenne de cette quantité constitue le niveau moyen. Les symboles suivants sont employés, par convention internationale :

- Z_{oo} : la meilleure estimation possible de la hauteur du niveau moyen au-dessus du niveau de référence couramment utilisé ;
- Z_o : une estimation individuelle de la hauteur du niveau moyen au-dessus du zéro des cartes ;

S_o : une estimation individuelle de la hauteur du niveau moyen au-dessus du zéro de l'échelle des observations de marée ;

A_o : une estimation individuelle de la hauteur du niveau moyen au-dessus d'un niveau de référence arbitraire qui ne soit pas l'un des deux niveaux précédents.

L'étude du niveau moyen a pour objet de préciser ses variations, dans le temps et dans l'espace, et de les relier à des phénomènes physiques.

Le niveau moyen joue un rôle important en géodésie. La surface du niveau moyen des mers n'est pas rigoureusement une surface équipotentielle, en raison des irrégularités de densité des eaux, des courants, etc. Cependant, avec une approximation de l'ordre du mètre, on peut la considérer comme telle et on appelle géoïde la surface équipotentielle qui coïnciderait en moyenne avec elle. Pratiquement, les réseaux de nivellement sont construits en partant du niveau moyen en un point par lequel on fait passer la surface d'altitude nulle du réseau.

2 - OBSERVATION DU NIVEAU MOYEN

2.1 - Les médimarémètres

L'observation directe du niveau moyen est rarement pratiquée. Les appareils utilisés à cet effet, appelés médimarémètres, éliminent par filtrage hydraulique les fréquences de la marée.

Un appareil de ce type a été conçu en France par LALLEMAND à la fin du 19^{ème} siècle. L'Institut Géographique National en possède toujours quelques exemplaires dont un au moins est en service à l'observatoire de Marseille qui est le point de référence de notre système d'altitudes.

L'appareil est constitué d'un tube vertical rigide et étanche dont la base, immergée au-dessous du niveau des plus grandes basses mers, communique avec la mer par l'intermédiaire d'un vase poreux. Le tube est normalement fermé à sa partie supérieure par un couvercle qui empêche toute introduction d'eau mais permet l'équilibrage des pressions d'air intérieure et extérieure. La mesure du niveau dans le tube se fait au moyen d'une sonde électrique à pointe mobile, avec une précision de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre.

La variation du niveau h dans le tube est proportionnelle à la dénivellation entre le niveau intérieur h et le niveau extérieur H comptés à partir du même zéro (Figure 1).

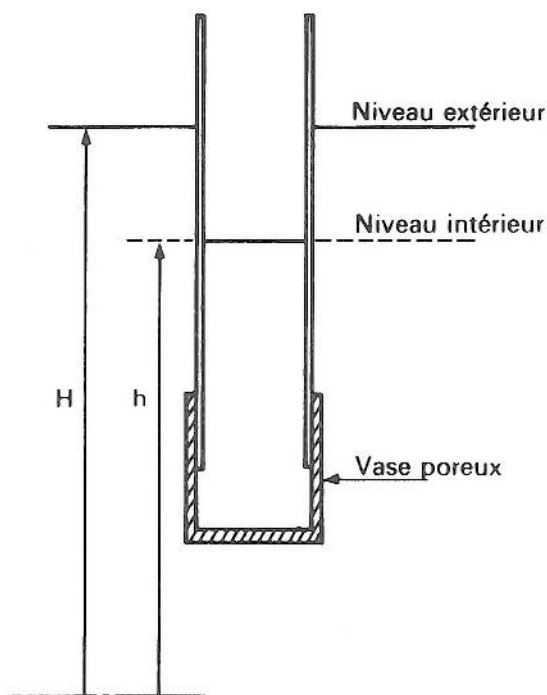


Figure 1 — Schéma d'un médimarémètre

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{p} (H - h) \quad (1)$$

p est le module d'amortissement du médimarémètre. C'est l'intervalle de temps nécessaire pour que, le niveau extérieur étant maintenu constant, la dénivellation $(H - h)$ soit divisée par $e = 2,718$.

La fonction de transfert $\hat{F}$ du médimarémètre se détermine facilement en appliquant la transformation de Fourier à l'équation (1) (voir appendice 1).

$$2i \pi v \hat{h}(v) = \frac{1}{p} (\hat{H}(v) - \hat{h}(v))$$

$$\text{d'où } \hat{F}(v) = \frac{1 - 2i\pi vp}{1 + 4\pi^2 v^2 p^2}$$

En introduisant la période $T = \frac{1}{v}$, on obtient les expressions suivantes du gain et du retard en temps :

$$\begin{cases} G = \frac{T}{2\pi p} \left(1 + \frac{T^2}{4\pi^2 p^2} \right)^{-1/2} \\ \theta = \frac{T}{2\pi} \text{Arc tg } \frac{2\pi p}{T} \end{cases}$$

Lorsque la période T est petite devant $2\pi p$, on a :

$$G \approx \frac{T}{2\pi p}$$

et les oscillations correspondantes sont très amorties.

Au contraire, lorsque T est grand devant p , on a :

$$\begin{cases} G \approx 1 \\ \theta \approx p \end{cases}$$

Les médimarémètres de l'IGN ont des modules de l'ordre de 0,5 à 1 jour. Le tableau 1 donne les coefficients d'amortissement pour les espèces diurne et semi-diurne.

Tableau 1

Espèce	Module	
	p = 0,5 jour	p = 1 jour
Diurne : $T \approx 1$ jour	0,30	0,16
Semi-diurne : $T \approx 0,5$ jour	0,16	0,08

Le décalage entre une lecture du niveau intérieur et le niveau moyen instantané correspondant est de l'ordre de p . L'encrassement progressif du vase poreux peut perturber le fonctionnement de l'appareil. Il faut, en pratique, changer le vase au moins une fois par an.

2.2 - Les marégraphes

L'emploi des médimarémètres qui ont, au moins en principe, l'avantage de la simplicité ne s'est jamais généralisé, bien qu'on soit capable de concevoir des filtres plus efficaces. Comme l'observation de la marée est souvent indispensable, pour d'autres raisons, le marégraphe classique reste l'instrument le plus couramment utilisé pour l'observation indirecte du niveau moyen.

Rappelons que la précision des observations est tributaire avant tout de la qualité des calages en heure et en hauteur. Seules les erreurs à caractère aléatoire peuvent être éliminées lors du calcul des niveaux moyens.

2.3 - Observations par satellites

L'altimétrie par satellite évoquée au chapitre II permet également de déterminer la topographie de la surface du niveau moyen des mers par rapport à un ellipsoïde de référence. La précision atteinte actuellement par cette technique est de l'ordre de quelques décimètres pour une résolution spatiale de l'ordre de la centaine de kilomètres.

3 - CALCUL DU NIVEAU MOYEN

3.1 - Principe

Le niveau moyen est rarement observé directement. Il faut en général le calculer à partir de séries de hauteurs instantanées échantillonnées. Le mode de calcul découle de la définition du niveau moyen : il faut filtrer les variations du niveau de la mer aux fréquences des ondes de la marée. Ce filtre peut être représenté par une opération de convolution (voir appendice 1) :

$$N(t) = F(\otimes) h(t) \quad (2)$$

Cette opération correspond, dans le domaine des fréquences à une relation simple entre les spectres d'amplitude :

$$\hat{N}(\nu) = \hat{F}(\nu) \cdot \hat{h}(\nu)$$

Le filtre F idéal doit satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \hat{F}(\nu) = 0 & \nu = \nu_i, \quad i = 1, \dots, n \\ \hat{F}(\nu) = 1 & \nu \neq \nu_i, \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

où $\{\nu_i \mid i = 1, \dots, n\}$ est l'ensemble des fréquences des ondes de la marée.

Dans la pratique on se contente d'un filtre passe-bas approchant ce filtre idéal. On imposera par exemple les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \hat{F}(\nu) \approx 0 & \text{pour } \nu > \text{Inf}(\nu_i) \\ \hat{F}(\nu) \approx 1 & \text{pour } \nu < \text{Inf}(\nu_i) \end{cases}$$

En outre, on ne dispose que d'un enregistrement de durée finie T et la relation (2) devient :

$$\tilde{N}(t, T) = \int_{t - T/2}^{t + T/2} h(\tau) F(t - \tau) d\tau \quad (3)$$

Selon la durée d'observation T utilisée, on parle de niveau moyen journalier ($T \approx 1$ jour), mensuel ($T \approx 1$ mois) ou annuel ($T \approx 1$ an).

L'efficacité du filtre adopté est déterminée par les valeurs du spectre $\hat{N}$ aux fréquences des ondes de la marée. $|N(v_i)|$ est appelé résidu relatif à l'onde i et $\hat{F}(v_i)$ est le coefficient de résidu de l'onde i .

Les filtres employés sont réels et symétriques ($\hat{F}(v) = \hat{F}(-v)$).

La procédure de calcul habituelle est la suivante :

- calcul des niveaux moyens journaliers par la formule (3) pour des instants t séparés d'un jour et avec $T \approx 1$ jour,
- calcul des niveaux moyens mensuels et annuels par moyenne des niveaux journaliers correspondants.

3.2 - Méthodes de calcul du niveau moyen journalier

3.2.1 - Détermination planimétrique

On fait la planimétrie de la courbe de marée de 0 à 24 h, la valeur obtenue se rapportant à 12 h.

$$\tilde{N}(t, T) = \frac{1}{T} \int_{t - T/2}^{t + T/2} h(\tau) d\tau$$

avec $t = 12$ h
 $T = 24$ h

La contribution de l'onde i au niveau ainsi calculé se détermine aisément :

$$R_i = H_i \int_{t - T/2}^{t + T/2} \cos(q_i \tau - \alpha_i) d\tau$$

$$R_i = H_i \frac{\sin \frac{q_i T}{2}}{q_i \frac{T}{2}} \cos(q_i t - \alpha_i)$$

Le coefficient de résidu de l'onde i est égal à $\frac{\sin \frac{q_i T}{2}}{q_i \frac{T}{2}}$. Lorsque T est égal à 24 h, il est nul pour S_2 et ses harmoniques.

Cette méthode est utilisée par le Service du Nivellement de l'Institut Géographique National, pour le calcul des niveaux moyens annuels.

3.2.2 - Combinaison de hauteurs horaires

Les enregistrements de marée sont traditionnellement dépouillés suivant les hauteurs horaires et les niveaux moyens sont alors calculés à l'aide de combinaisons linéaires de ces hauteurs :

$$\tilde{N}(t_0, M) = \sum_{k=-n}^n a_k h(t_0 + k\Delta)$$

avec $M = 2n + 1$, Δ le pas d'échantillonnage des hauteurs (une heure),
 $\{ a_k \mid k = -n, \dots, n \}$ une suite de coefficients réels.

La fonction de transfert d'un filtre de ce type a pour expression (voir appendice 1) :

$$\hat{F}(\nu) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{2i\pi k\nu\Delta}$$

Pour un filtre symétrique ($a_k = a_{-k}$) :

$$\hat{F}(\nu) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos 2\pi k\nu\Delta$$

Les coefficients $\{a_k\}$ peuvent être déterminés en imposant à $\hat{F}$ de prendre des valeurs données (nulles par exemple) aux fréquences des ondes de la marée.

On impose en outre la condition supplémentaire :

$$\hat{F}(0) = 1$$

pour ne pas introduire de biais sur le terme constant dans l'expression de la hauteur d'eau. Cette condition équivaut à la normalisation des coefficients a_k :

$$\sum_{k=-n}^n a_k = 1$$

Le tableau 2 rassemble les coefficients d'un certain nombre de filtres de ce type couramment utilisés. Les fonctions de transfert associées sont représentées sur la figure 2. Le tableau 3, qui regroupe les valeurs des coefficients de résidu des ondes principales permet de juger de leur efficacité.

Tableau 2

Exemples de filtres linéaires de calcul
du niveau moyen

k	(1) 25 a_k	(2) 30 a_k	(3) $10^7 \times a_k$	(4) 14400 a_k	(5) 24576 a_k
0	1	0	395 287	444	768
1	1	2	386 839	443	766
2	1	1	370 094	440	762
3	1	1	354 118	435	752
4	1	2	338 603	428	738
5	1	0	325 633	419	726
6	1	1	314 959	408	704
7	1	1	300 054	395	678
8	1	0	278 167	380	658
9	1	2	251 492	363	624
10	1	0	234 033	344	586
11	1	1	219 260	323	558
12	1	1	208 050	300	512
13		0	195 518	276	465
14		1	180 727	253	435
15		0	165 525	231	392
16		0	146 225	210	351
17		1	122 665	190	325
18		0	101 603	171	288
19		1	85 349	153	253
20			72 261	136	231
21			60 772	120	200
22			47 028	105	171
23			30 073	91	153
24			13 307	78	128
25				66	105
26				55	91
27				45	72
28				36	55
29				28	45
30				21	32
31				15	21
32				10	15
33				6	8
34				3	3
35				1	1

(1) : Moyenne de 25 hauteurs $a_{(-k)} = a_k$

(2) : Filtre X_0 de DOODSON $a_{(-k)} = a_k$

(3) : Filtre "Tide killer" de MUNK $a_{(-k)} = a_k$

(4) : Filtre de GODIN $a_{(-k)} = a_k$

(5) : Filtre de DEMERLIAC $a_{(-k)} = a_k$

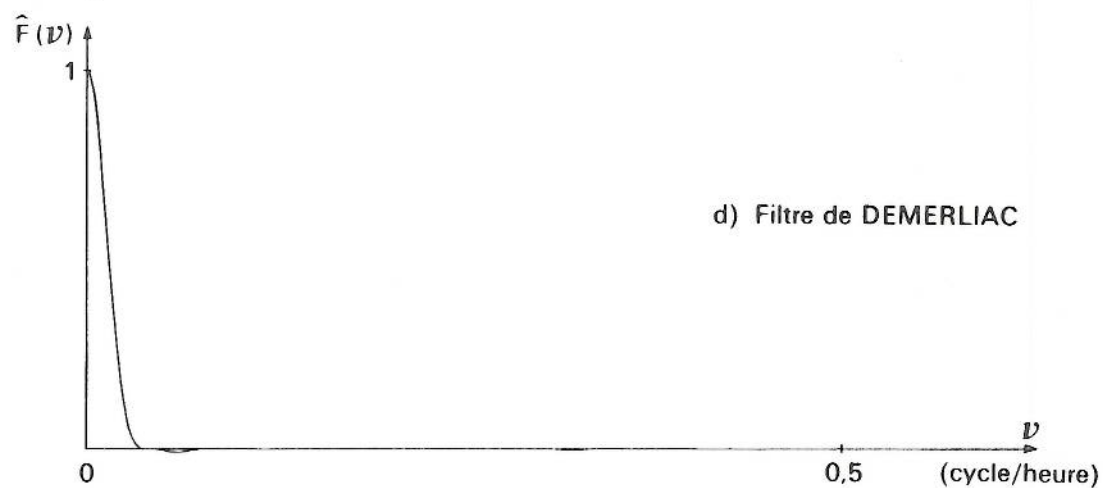
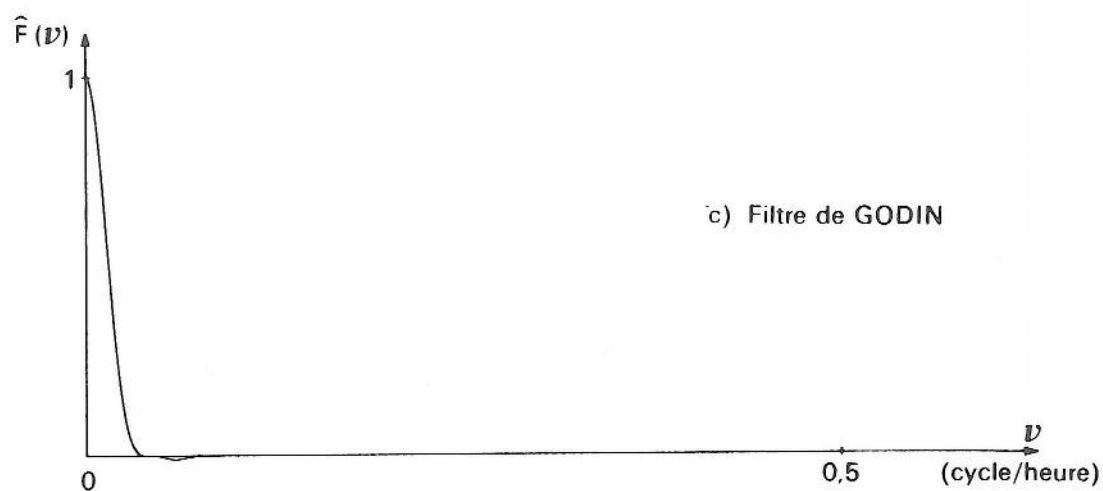
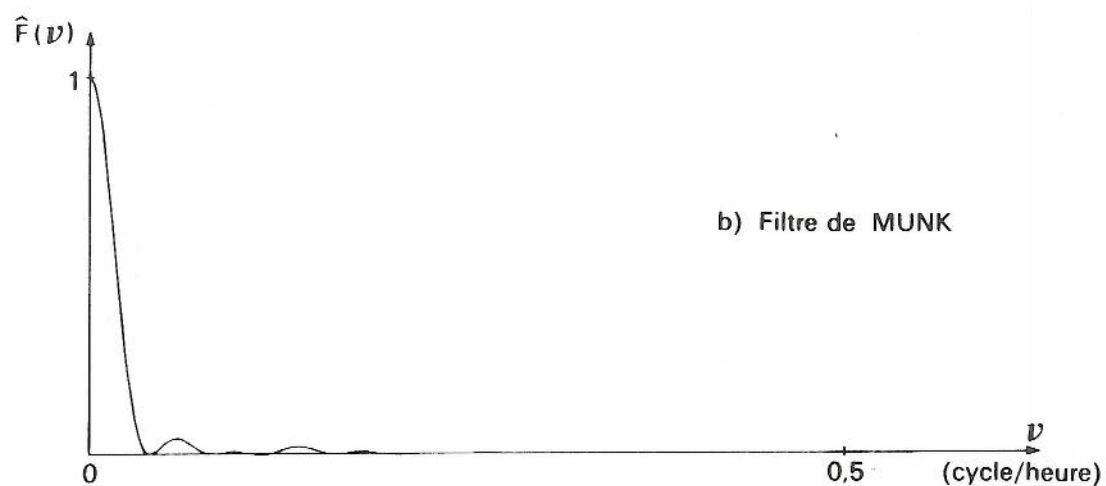
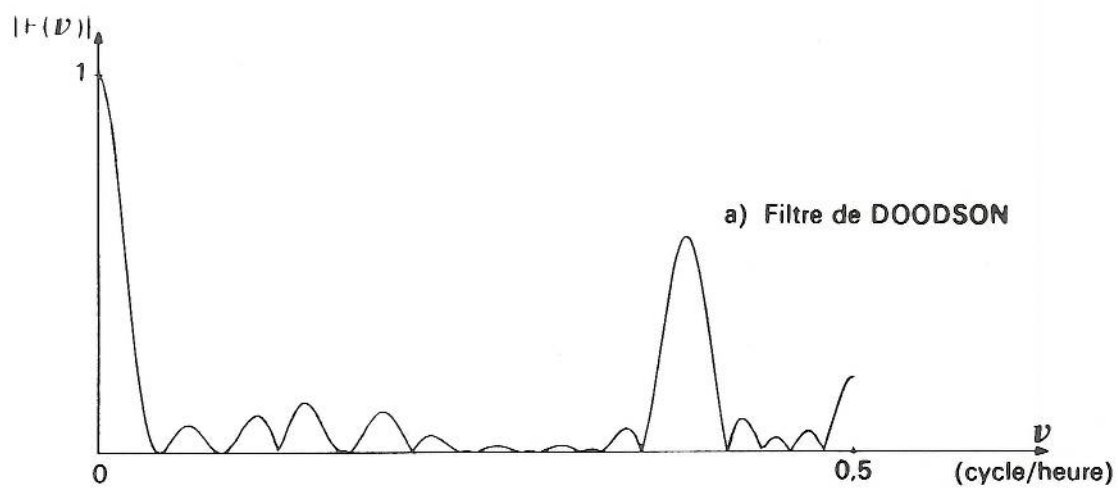


Figure 2. Filtres linéaires de calcul du niveau moyen

Tableau 3

Coefficients de résidu

Ondes	Filtres				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Q ₁	0,07431	0,01041	0,00740	0,00103	0,00162
O ₁	0,03280	0,00299	0,00141	0,00019	0,00043
P ₁	- 0,03738	- 0,00013	- 0,00096	0,00000	0,00000
K ₁	- 0,04260	0,00015	- 0,00074	0,00000	0,00000
N ₂	- 0,01279	0,00171	0,00089	0,00004	- 0,00016
M ₂	0,00642	- 0,00058	0,00002	0,00001	- 0,00004
S ₂	0,04000	0,00000	- 0,00020	0,00000	0,00000
K ₂	0,04255	0,00033	- 0,00015	0,00000	0,00000
M ₃	- 0,00650	- 0,00909	- 0,00008	0,00001	0,00004
M ₄	0,00662	0,00259	0,00030	0,00001	- 0,00004
MS ₄	0,02116	0,00484	0,00000	0,00001	- 0,00001
M ₆	0,00699	- 0,00198	- 0,00039	0,00001	- 0,00007
M ₈	0,00755	- 0,00384	- 0,00006	0,00001	- 0,00363

Les filtres les plus efficaces sont ceux qui possèdent un nombre élevé de coefficients. Cette constatation n'a rien de surprenant puisqu'on peut aussi imposer un plus grand nombre de conditions sur les résidus des différentes ondes. Remarquons que les hauteurs horaires n'ont pas toutes le même poids et que pour calculer le niveau moyen d'un jour donné, il faut débiter sur le jour précédent et sur le jour suivant.

Le calcul des niveaux moyens journaliers est effectué actuellement au SHOM à l'aide du filtre de DEMERLIAC conçu en 1973. Les résidus des différentes ondes sont très faibles : moins de 0,1 mm pour M₂ et moins de 0,2 mm pour la somme des modules des résidus à BREST.

3.3 - Calcul des niveaux moyens mensuels et annuels

On pourrait envisager de calculer les valeurs des niveaux moyens "journaliers" aux mêmes instants que les hauteurs initiales, par exemple toutes les heures. La moyenne de ces valeurs sur une longue période (le mois, l'année) ne dépendrait pratiquement pas du filtre utilisé. Compte tenu de la condition de normalisation, toutes les hauteurs auraient en effet le même poids dans le calcul de la moyenne, à l'exception des hauteurs des deux jours extrêmes de la période considérée.

Mais, par définition, le niveau moyen journalier varie peu au cours d'une journée et l'usage a prévalu de le calculer à des instants séparés de vingt quatre heures, en principe à midi de chaque jour. Les niveaux moyens mensuels et annuels sont obtenus en faisant la moyenne de ces valeurs sur un mois et sur une année :

$$N_P = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} \tilde{N}(t_0 + kJ, M)$$

avec $J = 1$ jour

$P \approx 30$ (niveau moyen mensuel)

ou $P \approx 365$ (niveau moyen annuel)

Ce calcul correspond à un filtrage supplémentaire de fonction de transfert simple :

$$G_P(\nu) = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} e^{2i\pi k \nu J}$$

$$G_P(\nu) = e^{i\pi (P-1)\nu J} \frac{\sin \pi \nu PJ}{\sin \pi \nu J}$$

Le module du coefficient de résidu d'une onde j est égal au produit du module de son coefficient de résidu dans l'expression du niveau moyen journalier par le module de $G_P(\nu_j)$. Le tableau 4 donne les valeurs de $|G_P(\nu_j)|$ pour différentes ondes et différentes durées PJ .

Tableau 4

Module du coefficient de résidu multiplicatif dans le calcul
des niveaux moyens mensuels et annuels

Durée (jours) Ondes	Niveau moyen mensuel				Niveau moyen annuel	
	28	29	30	31	365	366
S_a	0,9904	0,9897	0,9890	0,9882	0,0007	0,0021
M_f	0,0243	0,0570	0,0845	0,1059	0,0093	0,0073
Q_1	0,0037	0,0311	0,0602	0,0810	0,0009	0,0019
O_1	0,0138	0,0214	0,0532	0,0804	0,0096	0,0076
P_1	0,9904	0,9897	0,9890	0,9882	0,0007	0,0021
K_1	0,9904	0,9897	0,9890	0,9882	0,0007	0,0021
N_2	0,0302	0,0056	0,0384	0,0652	0,0009	0,0019
M_2	0,0541	0,0184	0,0157	0,0470	0,0100	0,0080
S_2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
K_2	0,9618	0,9591	0,9562	0,9533	0,0007	0,0021
M_3	0,0534	0,0186	0,0158	0,0464	0,0021	0,0047
M_4	0,0524	0,0187	0,0160	0,0457	0,0065	0,0064
MS_4	0,0541	0,0184	0,0157	0,0470	0,0100	0,0080
M_6	0,0497	0,0192	0,0165	0,0437	0,0022	0,0042
M_8	0,0458	0,0200	0,0172	0,0407	0,0013	0,0017

On retiendra que les résidus des ondes dont la vitesse angulaire est très proche d'un multiple de $15^\circ/\text{heure}$ sont peu réduits par le calcul des moyennes mensuelles. Les résidus des harmoniques de S_2 sont intégralement conservés, y compris dans le calcul du niveau moyen annuel.

Signalons que le niveau moyen annuel peut être calculé directement lors de l'analyse des observations correspondantes par les méthodes harmoniques (voir chapitre VIII).

4 - LES VARIATIONS DU NIVEAU MOYEN

4.1 - Variations temporelles

Les niveaux moyens journaliers, mensuels ou annuels déterminés en un point donné varient au cours du temps. Les phénomènes en cause sont de natures très diverses.

4.1.1 - Phénomènes périodiques

Les variations périodiques qui subsistent dans les niveaux moyens dépendent avant tout de la durée sur laquelle ils sont calculés. Ainsi, les niveaux moyens annuels contiennent l'onde nodale (nombre argument 055 565) de période 18,61 ans. L'extraction des ondes à très longues périodes est rendue difficile par leur faible amplitude (1 à 2 cm pour l'onde nodale) et par le fait qu'on dispose rarement d'observations fiables sur une durée suffisamment longue.

Outre les résidus de la marée proprement dite, d'autres effets périodiques se manifestent dans les niveaux moyens. Le déplacement de l'axe instantané de rotation de la Terre par rapport à un repère terrestre (polhodie) modifie le potentiel de la force d'attraction centrifuge due à la rotation de la Terre et engendre des oscillations du niveau de la mer de mêmes périodes (1 et 1,19 ans) improprement appelées marée polaire. L'effet Chandler est associé au terme de période 1,19 ans.

4.1.2 - Phénomènes météorologiques et océanographiques

Le niveau de la mer réagit aux contraintes exercées par l'atmosphère. La pression atmosphérique a , en particulier, un effet statique sous lequel l'océan se comporte comme un baromètre inversé (élévation du niveau de 1 cm lorsque la pression diminue de 1,005 mbar). Cette relation est bien mise en évidence par la comparaison des moyennes mensuelles du niveau et de la pression, pour lesquelles l'approximation statique est justifiée. Néanmoins, les rapports observés sont presque toujours inférieurs à la valeur théorique.

Le vent agit en exerçant une tension à la surface de l'océan qui induit des courants mais aussi des variations du niveau dans l'un ou l'autre sens.

Les variations d'origine météorologique sont bien entendu filtrées dans les mêmes conditions que la marée lors du calcul des niveaux moyens. Leur détermination a posteriori est obtenue par différence entre les hauteurs d'eau observées et la marée prédite. Leur prédiction suppose la prise en compte des paramètres représentatifs non seulement de la situation météorologique locale mais de la situation relative à une large zone autour du point considéré.

Deux méthodes sont utilisées à cet effet. La première consiste simplement à établir à partir des observations une formule d'estimation statistique du type :

$$N = Z_o + a P + b G_N + c G_E$$

où N est le niveau moyen journalier,
P la pression atmosphérique,
G_N la composante Nord-Sud du gradient de la pression,
G_E la composante Est-Ouest du gradient de la pression.
a, b, c des coefficients à déterminer.

Une formule aussi simple ne permet évidemment pas de prédire fidèlement les variations réelles ; elle permet tout au plus de donner l'allure générale des variations.

La seconde méthode fait appel à des techniques plus complexes. Elle repose sur la modélisation numérique des équations de la mécanique des fluides appliquées à l'océan (ou à une portion d'océan).

Le niveau de la mer dépend aussi, de façon plus ou moins complexe, des facteurs qui affectent le volume de l'eau dans les océans : le volume spécifique, les transports dus aux courants et accessoirement le cycle évaporation-précipitation.

La superposition des effets météorologiques et océanographiques se traduit en partie par une variation saisonnière des niveaux moyens mensuels dont l'amplitude peut être importante (20 cm ou plus) et qui peut faire l'objet d'une prédiction, en prenant simplement la moyenne des valeurs mensuelles observées sur un grand nombre d'années.

4.1.3 - Phénomènes séculaires

Outre les composantes à long terme des effets déjà mentionnés, il faut citer :

- les mouvements de la croûte terrestre qui affectent les niveaux de référence matériels utilisés pour déterminer les niveaux moyens ;
- le cycle climatique refroidissement - réchauffement qui fait varier le volume des calottes glaciaires. Actuellement, la fonte des glaces continentales se traduirait par une augmentation du niveau moyen des océans de 1 mm par an.

Les observations marégraphiques disponibles dans le monde sont très insuffisantes pour l'étude directe de ces phénomènes à très long terme de régression et transgression du niveau des mers.

4.2 - Variations spatiales

L'étude des variations spatiales du niveau moyen de la mer suppose la définition d'une surface de référence. Deux méthodes de nivellement sont possibles : la méthode géodésique et la méthode océanographique.

En géodésie, on détermine, par nivellement géométrique de précision et mesure de la pesanteur, des altitudes terrestres rapportées à la surface équipotentielle passant par un point donné. Ce point est en général pris au niveau moyen de la mer à un observatoire donné (Marseille pour la France). En rattachant entre eux des observatoires de marée situés sur un même continent, on obtient la cote des différents niveaux moyens locaux par rapport à la surface de référence.

La méthode océanographique (méthode dynamique, ou nivellement stérique) consiste à déterminer à partir du champ de densité de l'eau de mer, la topographie de la surface de la mer par rapport à une surface isobare de référence. Cette surface qui correspond selon les hauteurs à une pression de 1000 à 4000 db est supposée correspondre à une surface de mouvement nul, donc équipotentielle.

Les résultats obtenus par ces deux méthodes le long des côtes européennes et américaines de l'Atlantique et du Pacifique sont en désaccord. La méthode géodésique indique que les niveaux augmentent de quelques décimètres du Sud au Nord, dans l'hémisphère Nord (53 cm de Marseille à Dunkerque), alors que la méthode dynamique tenderait à donner le résultat inverse. Par contre les écarts entre les côtes Est et Ouest des Etats-Unis à la même latitude (le niveau moyen du Pacifique est à environ 60 cm au-dessus de celui de l'Océan Atlantique) obtenus par les deux méthodes sont cohérents.

La validité de la comparaison repose sur le "parallélisme" des deux surfaces de référence, ce qui reste à démontrer, et sur l'absence d'erreurs systématiques dans les procédures opératoires, ce qui par exemple pour le nivellement géométrique, n'est pas entièrement prouvé. En outre, l'extrapolation jusqu'à la côte des résultats de la méthode dynamique obtenus au large n'est pas forcément valable. La controverse, qui a déjà fait couler beaucoup d'encre, reste ouverte.

CHAPITRE XIV

LES COURANTS DE MAREE

1 - GENERALITES

Les mouvements des particules de l'océan sont variés et complexes. Ils sont provoqués par des causes diverses : le frottement du vent à la surface, les échanges de chaleur avec l'atmosphère, le potentiel générateur des marées ; ils sont perturbés par les limites continentales, la bathymétrie et les variations de densité de l'eau de mer. En raison de la faible profondeur des océans devant leurs dimensions horizontales, les déplacements des particules sont surtout horizontaux. On appelle courant la vitesse du déplacement horizontal des particules. Le courant en un point est caractérisé par sa grandeur (en m/s ou en noeuds) et sa direction (direction vers laquelle il porte, comptée de 0 à 360° à partir du Nord dans le sens des aiguilles d'une montre) ou par ses composantes selon deux axes rectangulaires (figure 1).

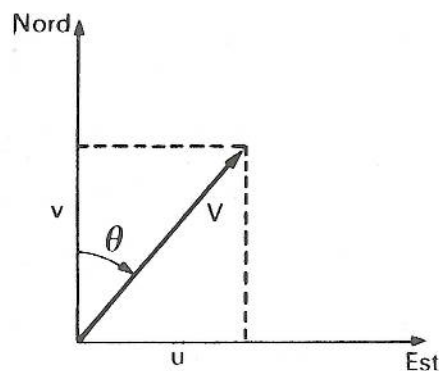


Figure 1 — Représentation du vecteur courant

Ces éléments varient au cours du temps. A l'échelle du globe, les forces qui agissent sur l'océan induisent une circulation moyenne à laquelle se superposent des fluctuations d'origines diverses qui couvrent une large gamme de fréquences et d'échelles horizontales. Les variations climatiques correspondent à des phénomènes qui ont une période de l'ordre de la dizaine d'années et une échelle horizontale de l'ordre du millier de kilomètres. Aux mouvements turbulents sont associées des périodes de l'ordre du centième de seconde et des échelles horizontales de l'ordre du centimètre.

Les courants de marée sont les déplacements horizontaux induits par le potentiel générateur et on peut, en principe, leur appliquer les techniques d'analyse et de prédiction développées pour la marée. En réalité, leur étude a été nettement moins poussée que celle de la marée pour plusieurs raisons. D'abord, l'observation précise des courants sur une longue durée est une opération difficile car elle doit être faite *in situ* et ne peut donc, en particulier, s'appuyer sur des infrastructures côtières stables. Un deuxième obstacle est la grande variabilité géographique des courants, surtout près des côtes, qui limite considérablement la portée de chaque étude locale, aussi soignée soit-elle. Par ailleurs, la séparation entre la part du courant due aux forces astronomiques et celle due aux autres causes est beaucoup moins évidente (figure 2), ce qui a aussi pour conséquence de limiter l'intérêt de prédictions précises des seuls courants de marée.

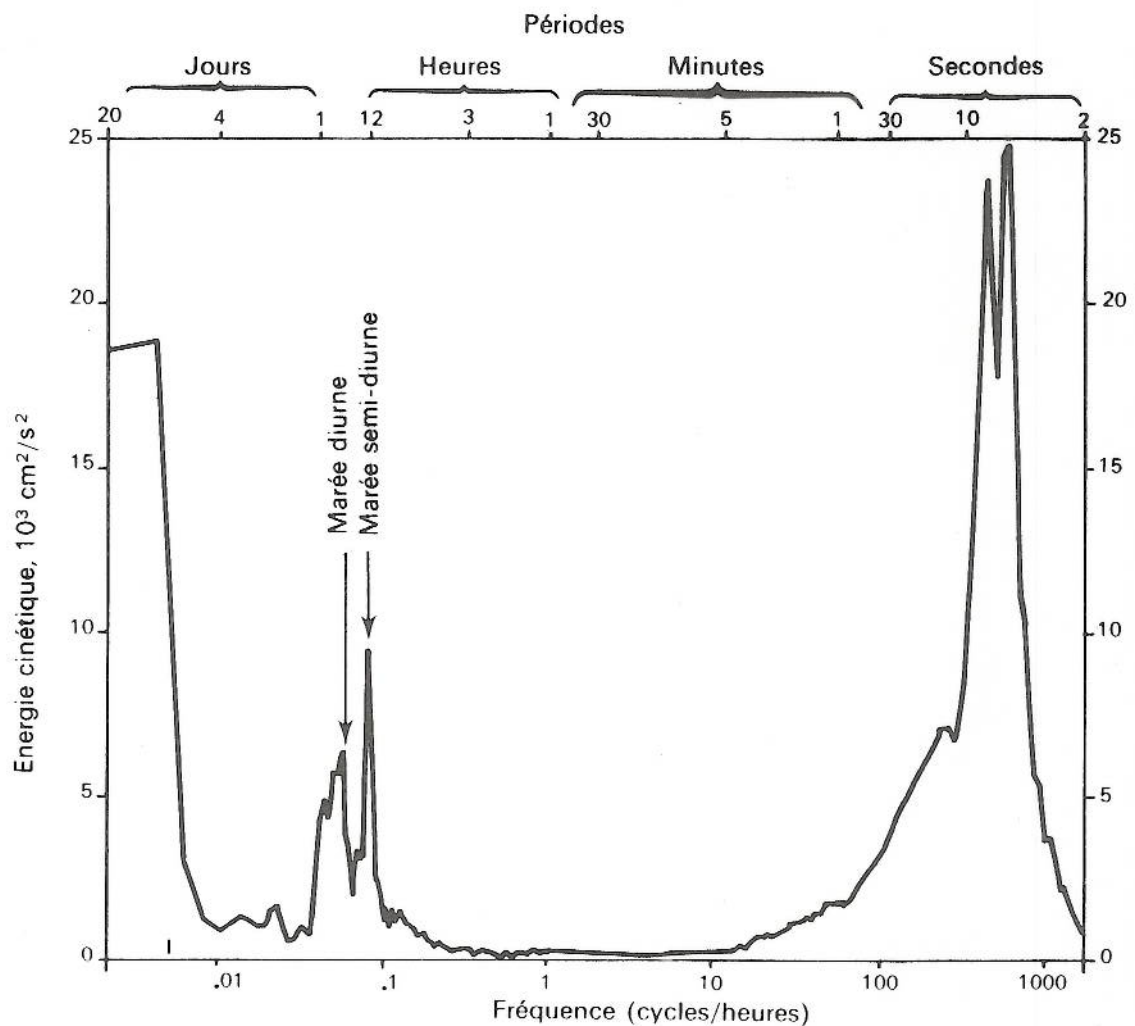


Figure 2 — Exemple de spectre d'énergie du courant en surface (fonds de 2600 m)

2 - OBSERVATION DES COURANTS

L'observation du mouvement des particules d'eau peut être envisagée des deux points de vue classiques de la mécanique des fluides : on s'attache à déterminer la vitesse des particules passant par un point donné, et on adopte le point de vue d'Euler, ou on s'attache à déterminer la trajectoire d'une particule passant à l'instant choisi comme origine par un point donné et on adopte le point de vue de Lagrange. Les méthodes d'observation de l'un ou l'autre type, directes ou indirectes, sont très nombreuses et leur description précise dépasse le cadre de ce cours.

2.1 - Méthodes directes

2.1.1 - Mesures au point fixe

Les appareils utilisés pour la mesure des courants au point fixe sont appelés courantomètres. Ils sont soit posés sur le fond soit, le plus souvent, fixés sur une ligne de mouillage aux caractéristiques variables avec la profondeur d'eau et la force des courants à mesurer (figure 3) et dont la bonne tenue aux efforts dynamiques et à la corrosion est une qualité essentielle.

Le choix de l'appareil dépend de l'usage qu'on veut en faire et de la précision recherchée. L'hydrographe qui cherche à mesurer des courants de marée parfois forts (1 à 2 noeuds, voire plus) utilise des appareils robustes donnant des valeurs "moyennes" (sur plusieurs minutes) de la vitesse et de la direction. L'océanographe préfère un appareil capable de mesurer des courants plus faibles mais donnant des valeurs quasi-instantanées et peu sensible aux mouvements du mouillage. L'autonomie de la source d'énergie et la capacité de mémoire pour stocker les mesures sont aussi des caractéristiques importantes.

Les principes de mesure sont divers. Pour la vitesse, on utilise :

- le comptage du nombre de tours sur un intervalle donné d'un moulinet (hélice ou rotor) à axe horizontal ou vertical ;
- la mesure de l'angle d'un fil soumis à une traînée reliée à la vitesse ou la mesure de la pression exercée sur un pendule, une plaque, une membrane, une sphère ou l'orifice d'un tube de Pitot ;
- la mesure de l'effet Doppler sur la rétrodiffusion d'ondes acoustiques ou électromagnétiques ;
- la mesure de la force électromotrice créée par le déplacement de l'eau de mer dans le champ magnétique terrestre ;
- la méthode du fil chaud : on mesure la vitesse de refroidissement d'un fil chaud placé dans l'eau en mouvement.

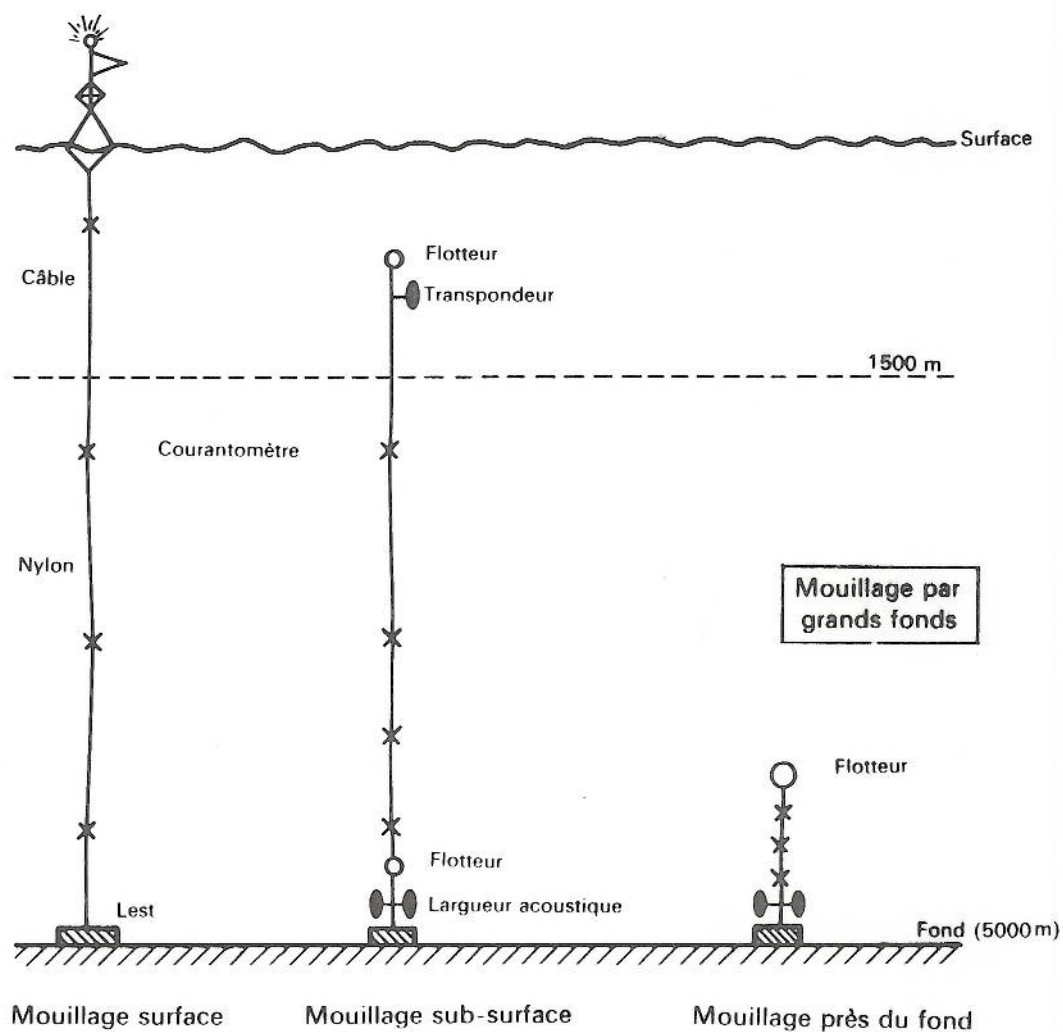
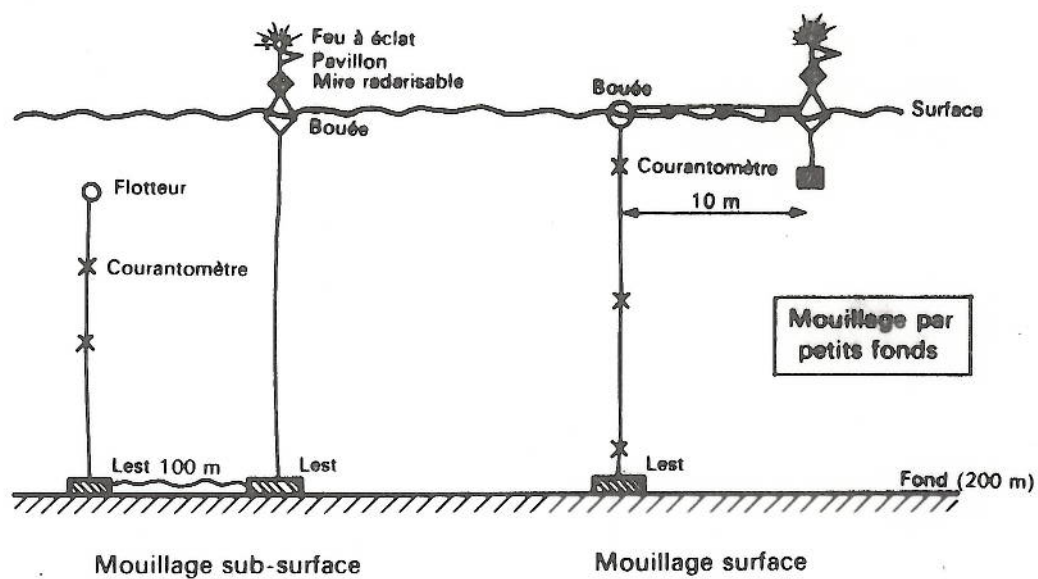


Figure 3 — Types de mouillage de courantomètre

Dans certains cas, on détermine par l'une de ces méthodes deux composantes orthogonales du courant. Mais les courantomètres les plus fréquemment utilisés mesurent la vitesse et la direction de l'appareil lui-même, mobile autour d'un axe vertical, ou d'une girouette, à l'aide d'un compas magnétique ou gyroscopique.

Trois types de procédures sont couramment utilisés pour l'acquisition des mesures :

- échantillonnage simple : on enregistre la valeur moyenne de la vitesse sur un intervalle fixé (par exemple 10 minutes) et la direction instantanée à la fin de chaque intervalle ;
- échantillonnage par à-coups : la fréquence de mesure est très élevée (une par seconde par exemple) mais l'acquisition n'a lieu que pendant des durées assez courtes (par exemple une minute toutes les dix minutes), pour permettre néanmoins des enregistrements de longue durée ;
- intégration vectorielle (courantomètres dits "VACM" pour "vector averaging current meter") : la direction est mesurée à chaque tour (ou à chaque fraction donnée de tour) d'un rotor et un calculateur interne calcule les composantes du vecteur courant moyen sur la période de prélèvement (quelques minutes habituellement).

Les données sont enregistrées sur bande magnétique ou sur mémoire morte. La capacité des appareils autonomes est de l'ordre de quelques milliers de valeurs, soit une autonomie de quelques semaines.

Les appareils doivent être étalonnés régulièrement pour garantir une bonne précision des mesures.

A titre d'exemple, le courantomètre SUBER SLS 11 utilisé par le SHOM est décrit sommairement en annexe.

2.1.2 - Mesures lagrangiennes

Il s'agit de suivre et de déterminer les positions successives d'un marqueur dérivant avec les masses d'eau, en surface ou à une immersion donnée. Les marqueurs utilisés couramment sont :

- les cartes-flotteurs, version moderne des "bouteilles à la mer",
- les bouées de surface reliées à une drogue fixée à une immersion donnée,
- les flotteurs de Swallow qui sont des flotteurs subsurface pesés pour une immersion donnée,
- les traceurs radioactifs ou colorés.

La position est déterminée soit de façon rudimentaire (point de départ et point de découverte d'une carte-flotteur) soit avec des techniques plus ou moins complexes :

- observations visuelles,
- retransmission de données de radiolocalisation,
- méthodes acoustiques,
- poursuite par satellites.

La qualité de la mesure dépend directement de la fréquence et de la précision de la localisation du traceur et de la bonne connaissance des lois qui permettent de relier son mouvement à celui des particules d'eau.

2.2 - Méthodes indirectes

Ces méthodes sont rarement utilisées pour la détermination des courants de marée. Elles ne sont donc citées ici que pour mémoire :

- méthodes électromagnétiques avec les appareils du type GEK (Geomagnetic Electro Kinetograph),
- méthode dynamique : le courant est calculé à partir de mesures de densité en appliquant les équations de la mécanique des fluides, avec un certain nombre d'hypothèses simplificatrices,
- détermination de la dérive : en comparant la position d'un navire déduite de procédés de localisation précis et la position estimée à partir des indications de cap et de vitesse surface, on peut en principe obtenir le champ de courants. Mais il faut aussi tenir compte de l'effet du vent sur le fardage.

3 - ETUDE DU COURANT DE MAREE EN UN POINT

3.1 - Représentation du courant de marée

Lors de l'établissement de la formule harmonique (cf. chapitre VI), on a exprimé le courant de marée sous la forme d'un développement :

$$\vec{V}(L, G, t) = \sum_{j=0}^N (\vec{V}_1(L, G) \cos q_j t + \vec{V}_2(L, G) \sin q_j t) \quad (1)$$

où les q_j sont les vitesses angulaires des termes associés du potentiel générateur ou des combinaisons linéaires de ces vitesses. On prendra, pour la suite :

$$q_0 = 0$$

Il est commode d'introduire la représentation complexe :

$$C(L, G, t) = u(L, G, t) + iv(L, G, t)$$

L'expression (1) se transforme en :

$$C(L, G, t) = \sum_{j=-N}^N \rho_j(L, G) e^{i(q_j t + v_{oj} + \alpha_j(L, G))}$$

$$\text{avec } q_{-j} = -q_j$$

v_{oj} argument astronomique de l'onde j à l'instant $t = 0$ à Greenwich,

$$v_{o-j} = -v_{oj}$$

$$\rho_j \geq 0$$

Posons :

$$a_j = \rho_j + \rho_{-j} \quad ; \quad b_j = \rho_j - \rho_{-j}$$

$$\beta_j = \frac{1}{2} (\alpha_j + \alpha_{-j}) \quad ; \quad g_j = \frac{1}{2} (\alpha_{-j} - \alpha_j)$$

pour $j > 0$

On obtient alors, en combinant les ondes j et $-j$:

$$C(L, G, t) = u_0(L, G) + iv_0(L, G) + \sum_{j=1}^N e^{i\beta_j(L, G)}$$

$$\left\{ a_j(L, G) \cos(q_j t + v_{oj} - g_j(L, G)) + ib_j(L, G) \sin(q_j t + v_{oj} - g_j(L, G)) \right\}$$

L'extrémité du vecteur représentatif de l'onde j décrit une ellipse caractérisée par la direction de son grand axe β (défini à π près), son demi grand axe a et son demi petit axe b . Si b est négatif, la rotation se fait dans le sens des aiguilles d'une montre ; si b est positif la rotation se fait en sens inverse et si $b = 0$, le courant partiel associé à l'onde j est alternatif.

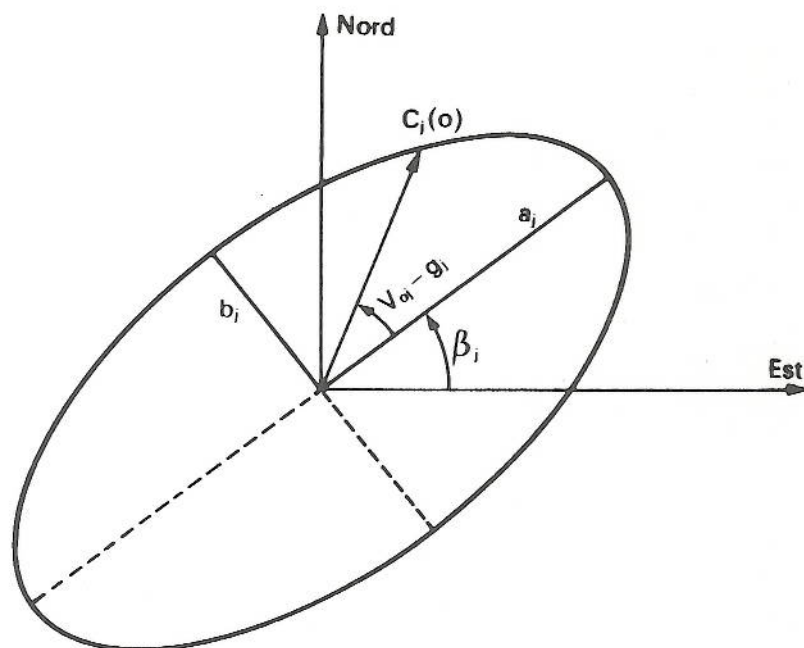


Figure 4 — Hodographe du courant partiel de l'onde j .

L'hodographe résultant de la superposition des ellipses composantes peut être de forme très variée suivant les valeurs relatives des différents paramètres et il peut varier au cours du temps dans des limites très larges.

Dans l'approximation des ondes longues, on a supposé que la vitesse était la même le long d'une verticale. Ceci est assez bien vérifié dans la réalité sauf au voisinage immédiat du fond où le frottement entraîne une réduction de la vitesse. Cette variation est habituellement représentée par des lois empiriques du type parabolique :

$$\vec{V}(L, G, z, t) = \alpha \vec{V}_m(L, G, t) \left(1 - \beta \frac{z^2}{H^2}\right)$$

ou exponentiel :

$$\vec{V}(L, G, z, t) = \alpha \vec{V}_m(L, G, t) \left(1 - \frac{z}{H}\right)^\beta$$

où $\vec{V}_m$ est la vitesse moyenne $\frac{1}{H} \int_0^H \vec{V} dz$ et H la profondeur.

3.2 - Les types de courant

Le régime des courants de marée dépend de deux fois plus de constantes que celui de la marée. Il s'ensuit qu'une classification simple, même approchée, analogue à la classification en types de la marée, est exclue.

Une distinction très sommaire peut néanmoins être introduite entre courants alternatifs et courants giratoires, les seconds constituant le cas général.

3.2.1 - Courants alternatifs

Dans certains cas, par exemple au large ou dans certains bassins, la marée est assimilable localement à une onde progressive simple unidimensionnelle et la surface a pour équation :

$$h(x, t) = A \cos (qt - kx)$$

où l'abscisse x est comptée suivant une direction convenable du plan horizontal. q est la vitesse angulaire de l'onde dominante (par exemple M_2).

Les crêtes et les creux sont des droites d'équation :

$$x = \frac{qt}{k} + \frac{n\pi}{k} \quad (n \text{ entier})$$

qui se propagent suivant la direction x à la vitesse $v_p = \frac{q}{k}$. Leur passage en un point donné correspond à la pleine mer (n pair) ou à la basse mer (n impair).

La résolution des équations linéaires des ondes longues (voir chapitre VI) dans lesquelles on néglige la force de Coriolis et le gradient du potentiel générateur, soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + H \operatorname{div} u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

fournit l'expression du courant :

$$u(x, t) = u_0 + \frac{Agk}{q} \cos (qt - kx)$$

et impose la relation classique :

$$v_p = \sqrt{gH}$$

En l'absence de courant résiduel ($u_r = 0$), le courant est alternatif et a même période que la marée (figure 5). On appelle flot le courant portant dans le sens de propagation, jusant le courant inverse. Le flot est maximum à pleine mer ; le jusant est maximum à basse mer. Au moment de la mi-marée, le courant s'annule et il y a étale de courant (étale de flot à la fin du flot ; étale de jusant à la fin du jusant).

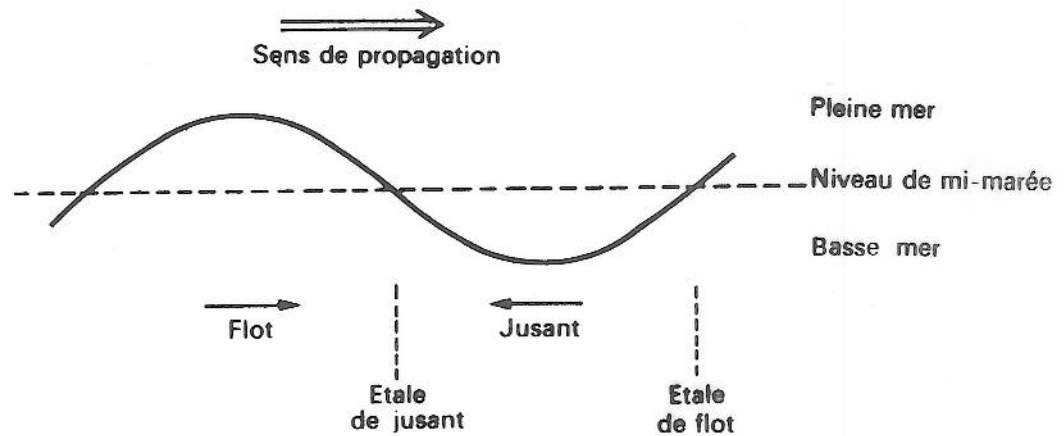


Figure 5

Un autre cas simple est celui de l'onde stationnaire :

$$h(x, t) = A(x) \cos qt$$

pour laquelle :

$$u(x, t) = -\frac{g}{q} A'(x) \sin qt$$

et
$$A'' + \frac{q^2}{gH} A = 0$$

soit
$$\left\{ \begin{array}{l} A(x) = A \cos kx \\ k = \frac{q}{\sqrt{gH}} \end{array} \right.$$

d'où
$$u(x, t) = \frac{gk}{q} A \sin kx \sin qt$$

Dans un tel régime, le courant est maximum à mi-marée et nul aux pleines et basses mers. Il est perpendiculaire à la nodale ($x = \frac{\pi}{2k}$) et porte vers elle en marée descendante (jusant); il s'éloigne d'elle en marée montante (flot) (Figure 6).

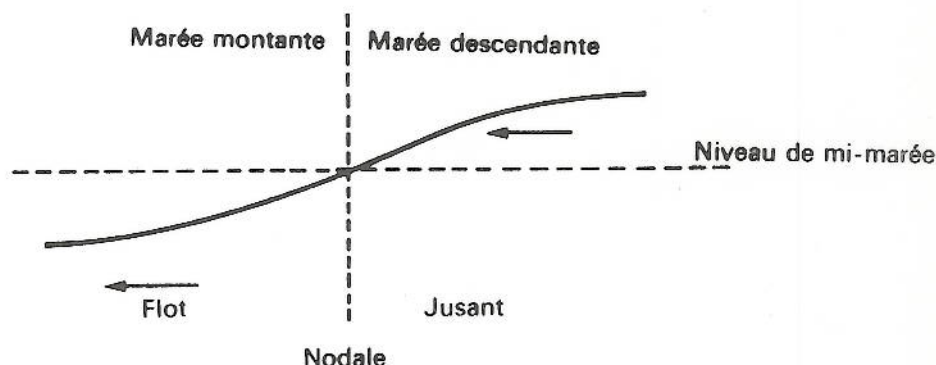


Figure 6

La hauteur d'eau peut s'exprimer sous la forme :

$$h = \frac{A}{2} \cos (qt + kx) + \frac{A}{2} \cos (qt - kx)$$

C'est la superposition de deux ondes progressives de même amplitude, de même période et de même longueur d'onde se propageant suivant deux directions opposées. Lorsque les amplitudes des deux ondes diffèrent, le régime devient plus complexe et en particulier les étales de courant ne coïncident ni avec les étales de niveau ni avec la mi-marée.

3.2.2 - Courants tournants ou giratoires

Le plus souvent, la direction du courant varie continûment au cours d'un cycle de marée et cette variation revêt des aspects très divers qui se traduisent par des formes plus ou moins simples d'hodographes. La notion de flot et de jusant est alors dénuée de sens mais par convention, on appelle flot le courant qui accompagne la marée montante, jusant celui qui accompagne la marée descendante.

Les courants giratoires sont engendrés en particulier par la superposition de deux ondes progressives se propageant suivant des directions non parallèles. D'autres phénomènes interviennent aussi : l'effet de la force de Coriolis - qui tend à faire tourner un courant initialement alternatif dans le sens des aiguilles d'une montre (dans l'hémisphère Nord) - l'effet du frottement sur le fond et les effets de topographie qui fixent les limites du domaine de l'écoulement.

4 - ANALYSE DES OBSERVATIONS DE COURANT

Les observations de courant se prêtent aux techniques générales d'analyse des séries chronologiques : analyse statistique (sur les composantes ; sur la vitesse et la direction) et analyse spectrale. Nous ne décrivons ici que les méthodes utilisées plus particulièrement pour l'analyse du courant de marée proprement dit.

Les méthodes décrites pour l'analyse des observations de marée s'appliquent aux observations de courant en raisonnant soit sur les composantes prises séparément soit sur la représentation complexe du vecteur courant. Elles doivent néanmoins être adaptées pour tenir compte de deux aspects spécifiques : d'abord le rapport signal à bruit (d'origine météorologique ou instrumentale) est nettement moins favorable que pour la marée, ensuite les durées d'observations disponibles sont souvent trop courtes (quelques jours) pour permettre une analyse harmonique.

4.1 - Analyse harmonique

Les méthodes décrites au chapitre VIII sont directement applicables soit aux séries relatives à chacune des composantes du vecteur courant prises séparément soit en utilisant la notation complexe.

La méthode développée au SHOM est une variante de la méthode des hauteurs réduites dans laquelle la réduction des observations est basée sur un développement polynomial du 3ème degré de la modulation associée à une onde donnée. Ce filtrage fait perdre trois jours d'observation par période analysée. Les constantes sont ensuite calculées par la méthode des moindres carrés. Le caractère vectoriel du courant implique la recherche de $2N + 1$ espèces au lieu de N pour la marée.

Les ondes perturbatrices k d'une onde l sont prises en compte par une correction nodale calculée, de la même façon que pour la marée, en faisant les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho_k}{\rho_l} = \frac{G_k}{G_l} = \text{rapport des coefficients astronomiques} \\ \alpha_k = \alpha_l \end{array} \right.$$

Pour les ondes k mal séparées de l'onde l , on fait les hypothèses suivantes :

$$a_k = \varepsilon_k a_l$$

$$b_k = \varepsilon_k b_l$$

$$g_k = g_1 + \delta_k (g_2 - g_1) \frac{q_k - q_1}{q_2 - q_1}$$

$$\beta_k = \beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) \frac{q_k - q_1}{q_2 - q_1}$$

avec
$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_k = \frac{H_k}{H_1} \\ \delta_k = \frac{g'_k - g'_1}{q_k - q_1} \bigg/ \frac{g'_2 - g'_1}{q_2 - q_1} \end{array} \right.$$

où H et g' sont les constantes harmoniques correspondantes de la marée en un point voisin du lieu d'observation.

Le calcul effectif est réalisé par approximations successives comme pour la marée.

4.2 - Analyse par concordance

Pour l'onde progressive $h(x, t) = A \cos(qt - kx)$, la résolution des équations de la marée fournit une expression simple du courant en fonction de la hauteur :

$$u(x, t) = \frac{gk}{q} h(x, t)$$

Plus généralement, le courant à un instant donné est, au moins en première approximation, une fonction vectorielle de la hauteur de la marée. Comme celle-ci peut être déduite, lorsque la marée est de type bien défini (semi-diurne ou diurne) des éléments de l'extrémum le plus proche, on peut rechercher par la méthode des concordances à tabuler des relations du type :

$$\vec{V}(t) = \vec{F}(h_{PM}, \frac{M}{T}(t - t_{PM}))$$

sur chaque intervalle de T heures encadrant une pleine mer de hauteur h_{PM} (ou une basse mer). M est pris égal à 12 ou à 24 h suivant que la marée est semi-diurne ou diurne ; $\frac{M}{T}(t - t_{PM})$ représente "l'heure marée". La tabulation porte soit sur les composantes soit, le plus souvent, sur la vitesse et la direction.

L'élimination des perturbations météorologiques nécessite soit d'estimer leur valeur à partir des paramètres météorologiques (on prend, par exemple, un courant de dérive égal à 3 % du vent) soit de supposer qu'elles sont constantes au cours du cycle de marée considéré et égales à la valeur moyenne sur cette période du courant observé. C'est cette dernière approche qui est utilisée au SHOM pour la confection des tableaux dits de "Courtier" en régime de marée semi-diurne.

La hauteur de la pleine mer de référence est alors remplacée par le coefficient correspondant et le rapport $\frac{M}{T}$ est pris égal à 1. Les résultats sont souvent présentés sous forme d'hodographes rapportés à la pleine mer (ou à la basse mer) (figure 7). Pour éliminer les effets de l'inégalité diurne, on moyenne les valeurs issues de deux cycles successifs.

Lorsque les observations sont de courte durée, il est préférable qu'elles correspondent à des situations caractéristiques de la marée, c'est-à-dire vive-eau et morte-eau. Lorsque l'inégalité diurne devient importante, cette distinction n'a plus grande signification et on recherchera plutôt une situation moyenne.

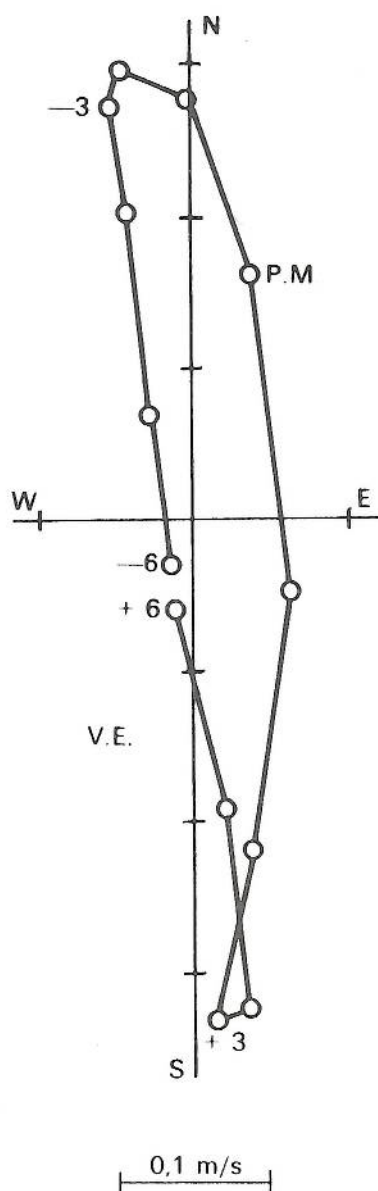


Figure 7 — Exemple d'hodographe du courant de marée rapporté à la pleine mer.

(Le 21 janvier 1976, au point L = 48° 16' N G = 4° 05' W à l'immersion 35 m.)

5 - PREDICTION DES COURANTS DE MAREE

Les prédictions des courants de marée sont publiées le plus souvent sous forme de tableaux de courants, de cartes de courants et plus rarement dans des annuaires. Il ne faut pas oublier que la valeur de ces prédictions dépend bien sûr de la qualité et de la durée des observations sur lesquelles elles s'appuient et que le courant réel est fortement tributaire des conditions météorologiques, du vent en particulier.

Les tableaux de courant s'appuient sur une prédiction de marée en un port de référence. Ils donnent d'heure en heure, de six heures avant à six heures après la pleine mer (en régime semi-diurne) la vitesse et la direction du courant pour des hauteurs caractéristiques de la marée (par exemple vive-eau et morte-eau moyennes) du port de référence. Pour une marée quelconque, on peut admettre, compte tenu de la précision de ce type de prédiction, une relation linéaire entre la vitesse et la hauteur de la pleine mer. Pour la direction, il suffit d'utiliser celle qui correspond à la hauteur caractéristique la plus voisine.

Le SHOM publie des prédictions de courant sous cette forme dans l'ouvrage n° 550 qui regroupe l'ensemble des renseignements disponibles sur les courants de marée dans la Manche et le long des côtes françaises de l'Atlantique. Les vitesses sont données pour les coefficients 45 et 95. La vitesse pour une marée de coefficient quelconque C s'obtient par la formule :

$$V(C) = V_{ME} + \frac{C - 45}{50} (V_{VE} - V_{ME})$$

Les cartes de courants sont la représentation cartographique des tableaux de courants. Elles portent un ensemble de flèches dirigées dans le sens du courant à l'instant considéré. La vitesse est indiquée soit à l'aide des symboles graphiques appropriés (flèches de longueur ou d'épaisseur variable) soit à l'aide de nombres exprimant la vitesse en vive-eau et en morte-eau, le plus souvent en dixièmes de noeuds. Les treize cartes horaires correspondant à un cycle semi-diurne sont parfois regroupées dans des atlas de courants.

Certains pays étrangers (Etats-Unis, Canada) publient des annuaires qui donnent pour chaque jour de l'année les maxima et les étales de courant pour quelques ports ou détroits importants. Ces prédictions sont établies par la méthode harmonique. Elles ont l'avantage d'être indépendantes des prédictions de marée, ce qui est parfois indispensable lorsque le régime des courants et celui de la marée sont très différents.

6 - DETERMINATION DE LA MAREE AU LARGE A PARTIR DES COURANTS DE MAREE

Les observations de marée au large sont relativement rares et récentes comparativement aux observations de courant. Il a donc paru judicieux de rechercher, à partir des équations de la marée une méthode de détermination de la marée à partir des courants. Ce problème a été étudié successivement par DEFANT (1923), PROUDMAN et DOODSON (1924) et DOODSON et CORKAN (1932). Cette méthode a été essentiellement appliquée à la Manche et à la Mer du Nord.

L'océan est rapporté à un système d'axes lié à la Terre, Oxyz, Oy dirigé vers le Nord, Ox vers l'Est et Oz suivant la verticale ascendante. On considère une onde marée "dérivée" - c'est-à-dire qu'on néglige les effets directs de la force génératrice - dans l'approximation linéaire des ondes longues. Les équations indiquées au chapitre VI deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 2 \omega v \sin L = -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2 \omega u \sin L = -g \frac{\partial h}{\partial y} \end{cases}$$

où u et v sont les composantes Ouest-Est et Sud-Nord du courant,

ω , la vitesse angulaire de rotation de la terre,

L , la latitude du lieu considéré,

h , la hauteur de la marée,

et g , la pesanteur locale.

La connaissance de u et v en fonction du temps en un certain nombre de stations assez proches permet donc de déterminer la pente locale instantanée de la surface libre. En partant d'un point où la hauteur est connue (à la côte par exemple), on peut ainsi calculer de proche en proche la marée aux diverses stations de mesure du courant.

Cette méthode est basée sur un certain nombre d'approximations dont la validité est à discuter. En particulier, lorsque les lignes de courant ont une courbure appréciable, les termes non linéaires de l'accélération ne sont plus négligeables.

Dans l'hypothèse linéaire, l'influence de la précision des mesures de courant est facilement appréciable.

Soient Δu et Δv la précision sur la mesure des composantes du courant et Δt l'intervalle de discrétisation utilisé pour le calcul de $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$.

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2 \omega \sin L}{g} v$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{2 \omega \sin L}{g} u$$

$$d'où \Delta \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \approx \frac{2}{g} \left(\frac{\Delta u}{\Delta t} + \bar{\omega} \sin L \Delta v \right)$$

$$\Delta \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) \approx \frac{2}{g} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} + \omega \sin L \Delta u \right)$$

Application numérique

$$\Delta u = \Delta v = 3 \text{ cm/s}$$

$$\Delta t = 10 \text{ minutes}$$

$$L = 50^\circ$$

$\Delta \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = \Delta \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) \approx 10^{-5}$ soit 1 cm par kilomètre, ce qui n'est pas négligeable.

Le terme prépondérant provient du calcul de $\frac{\partial u}{\partial t}$ (ou $\frac{\partial v}{\partial t}$). La précision dans la détermination de h sera nettement meilleure pour des profils normaux aux lignes de courant.

Par exemple, si $v = 0$ (courant Est-Ouest)

$$\Delta \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ soit } 0,3 \text{ mm par kilomètre.}$$

ANNEXE

COURANTOMETRE SUBER SLS 11

L'appareil se présente sous la forme d'un corps cylindrique d'environ 1 m de haut et 20 cm de diamètre ; il pèse une vingtaine de kilos dans l'air. Les éléments sensibles sont logés dans une cage qui se trouve à la partie supérieure : ce sont un rotor de Savonius et une girouette à axes verticaux. Un compas magnétique est situé dans le corps de l'appareil.

Le rotor est muni de un ou plusieurs aimants dont le passage devant un barreau déclenche la mesure du cap magnétique θ de la girouette. Les composantes du courant sont calculées par intégration vectorielle sur des intervalles fixes.

$$\begin{cases} u = a \sum_{j=1}^n \sin \theta_j \\ v = a \sum_{j=1}^n \cos \theta_j \end{cases}$$

où n est le nombre de mesures effectuées dans l'intervalle et a une constante qui dépend du rotor utilisé (1, 2 ou 4 aimants).

L'intervalle d'intégration est, au choix, de 10, 30 ou 60 minutes. La base de temps est fournie par une horloge à quartz de stabilité 10^{-4} . La capacité de la mémoire est de 3000 mesures. L'alimentation est assurée par des piles au lithium d'autonomie voisine de 4 ans.

Les données sont prélevées par simple connexion à une unité de traitement.

La résolution de la mesure est de l'ordre de 3 cm/s, la plage d'utilisation allant de 2,5 cm/s à 80 cm/s (4 aimants), 160 cm/s (2 aimants) ou 320 cm/s (1 aimant). Les deux versions existantes peuvent être immergées jusqu'à 1000 ou 6000 m respectivement.

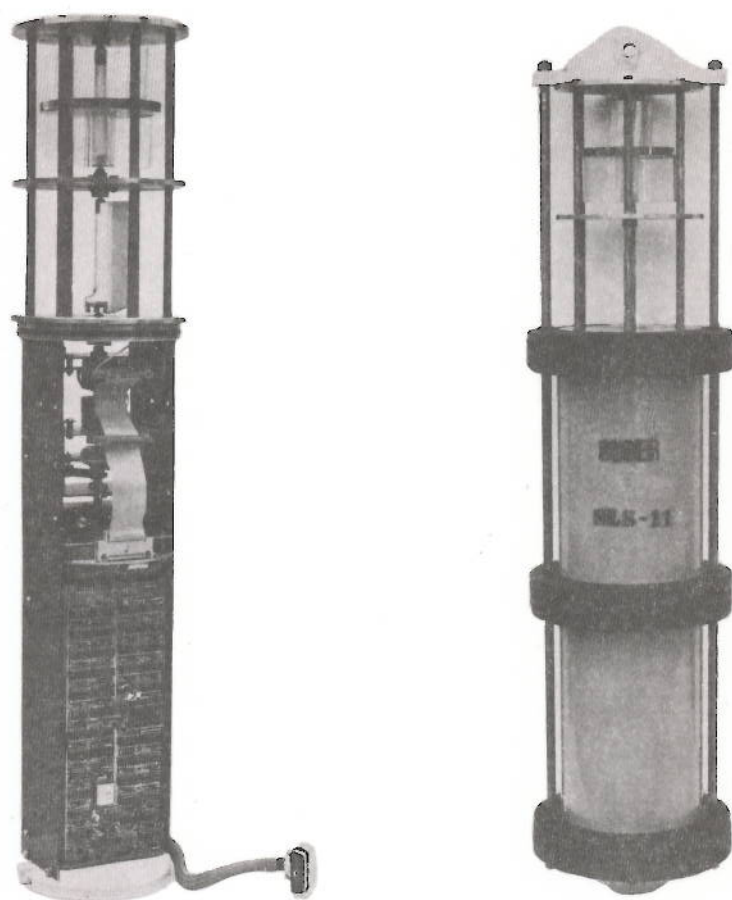


Figure 1. Courantomètre SUBER SLS 11

CHAPITRE XV

LA PROPAGATION DE LA MAREE

1 - GENERALITES

La marée est, par définition, la réponse de l'océan à l'excitation du potentiel générateur. Cette réponse est une fonction du temps et de la position ; elle est théoriquement déterminée par la résolution des équations de la mécanique des fluides, dans les conditions décrites au chapitre VI :

- la composante verticale de la vitesse est négligeable devant la composante horizontale ;
- la vitesse est la même en tous les points d'une verticale, sauf au voisinage immédiat du fond, ce qui est pris en compte par l'introduction d'un terme supplémentaire de frottement.

Ces conditions correspondent à l'approximation des ondes longues, ou ondes de masse, c'est-à-dire ayant une longueur d'onde grande devant la profondeur des océans.

La nature de la réponse de l'océan dépend des caractéristiques géométriques du bassin considéré. Trois types de marées peuvent être distingués :

- 1) les marées océaniques : au large, les termes non linéaires des équations de la marée sont négligeables et la dénivellation s'exprime sous forme d'une combinaison d'ondes élémentaires dont les vitesses angulaires sont connues et égales à celles des termes associés du développement du potentiel générateur.

- 2) les marées littorales : près des côtes, les équations ne peuvent plus être linéarisées. La dénivellation de la surface libre n'est plus négligeable devant la profondeur ; les effets des parois et les transferts d'énergie par turbulence deviennent importants. La théorie prévoit l'apparition d'ondes élémentaires nouvelles dont les vitesses angulaires sont des combinaisons linéaires des vitesses des termes du potentiel générateur. Ces ondes dites de petits fonds traduisent la déformation plus ou moins prononcée de la courbe de marée par rapport à la marée "pure" du large.
- 3) les marées fluviales : la propagation de la marée dans la partie maritime des fleuves engendre un phénomène hydraulique encore plus complexe en raison du nombre important de paramètres qui interviennent (pente et forme du lit ; débit fluvial ; rugosité des parois ; etc.) et qui sont souvent mal définis.

La propagation d'une onde de marée i dans l'océan est caractérisée par les fonctions $A_i(L, G)$ et $g_i(L, G)$ où A_i et g_i sont respectivement l'amplitude et la situation relative de l'onde et L et G la latitude et la longitude. Ces éléments sont habituellement représentés sur des cartes de lignes cotidales (g_i constant) et d'isomarnage (A_i constant). Les lignes cotidales sont graduées en degrés ou en temps $\frac{g_i}{q_i}$. La situation est rapportée au temps U.T. ou au temps du fuseau de la zone étudiée. La propagation de l'onde a lieu dans le sens des situations croissantes. Les lignes d'isomarnage sont graduées en mètres. On préfère quelquefois utiliser le déphasage et le quotient des amplitudes par rapport aux éléments d'un port de référence.

Les premières cartes cotidales ne considéraient pas les ondes séparément mais plutôt la marée totale. Les heures des pleines mers étaient exprimées habituellement en temps moyen lunaire de Greenwich et pour les jours de pleines ou nouvelles lunes. Les lignes cotidales et d'isomarnage étaient donc graduées avec les valeurs moyennes correspondant à cette situation particulière. Cette façon de procéder n'est satisfaisante que pour les régions à marée semi-diurne, pour lesquelles la pleine mer suit le passage de la Lune au méridien d'un intervalle de temps à peu près constant. Dans le cas général, il vaut mieux étudier chaque onde séparément.

2 - LA RESOLUTION DES EQUATIONS DE LA MAREE

2.1 - Solutions analytiques

La résolution analytique des équations de la marée n'a été réalisée complètement que dans le cas linéaire des marées océaniques (cf. chapitre VI). La solution générale du problème linéaire est la somme de la solution générale des équations sans second membre (correspondant à l'absence de force excitatrice) et d'une solution particulière des équations complètes. Ces deux solutions partielles correspondent respectivement aux oscillations libres ou modes propres dont les fréquences ne sont fonction que de la géométrie du bassin et aux oscillations entretenues ou modes forcés dont les fréquences sont celles des termes du potentiel générateur. Si une de ces fréquences est proche d'une fréquence propre, il y a résonance, c'est-à-dire amplification de l'oscillation entretenue. Cette possibilité justifie l'intérêt de l'étude des oscillations libres des bassins océaniques.

Le calcul exact de la solution n'est pas possible pour un bassin réel en raison de la complexité de ses limites. Il faut se contenter d'étudier des bassins idéals de profondeur constante et de forme simple. La détermination complète des modes propres d'un océan sphérique ou hémisphérique (limité par des méridiens distants de 180°) est récente : elle est due essentiellement à LONGUET-HIGGINS respectivement en 1968 et 1970. Les résultats obtenus confirment que les fréquences des ondes semi-diurnes tombent effectivement dans le domaine des fréquences propres ce qui laisse prévoir l'existence de phénomènes de résonance. L'étude des modes forcés d'un océan limité par deux méridiens (distants de 60° pour représenter grossièrement l'Atlantique ou de 180° pour le Pacifique) met en évidence la sensibilité de ce phénomène à la profondeur choisie. Dans les deux cas, les calculs deviennent rapidement très complexes.

La figure 1 donne, à titre d'exemple, les solutions obtenues pour K_1 et K_2 , dans un océan hémisphérique, par PROUDMAN et DOODSON en 1936 et 1938. Les variations de la profondeur adoptée se traduisent par une modification radiale du schéma initial simple de la marée statique se propageant de l'Est vers l'Ouest en profondeur infinie, avec apparition de points amphidromiques (où l'amplitude est nulle). La résonance obtenue pour K_1 correspond à une multiplication par quatre de l'amplitude maximum. La solution pour K_2 est très sensible à la profondeur, le nombre de points amphidromiques passant de 12 à 8 pour une variation de la profondeur de 500 m.

Un autre résultat intéressant de ce type de calcul est que les élévations de la surface libre ont tendance à être plus fortes à la côte qu'au large, ce qui est cohérent avec les observations.

Les méthodes analytiques ne permettent pas de préciser davantage les caractéristiques de la propagation de la marée dans l'océan réel. Le tracé des cartes de lignes cotidales et d'isomarnage pour l'océan réel repose sur trois types de procédés qui sont, dans l'ordre chronologique de leur apparition : les méthodes empiriques, les méthodes semi-empiriques, et plus récemment, les modèles numériques ou hydrauliques.

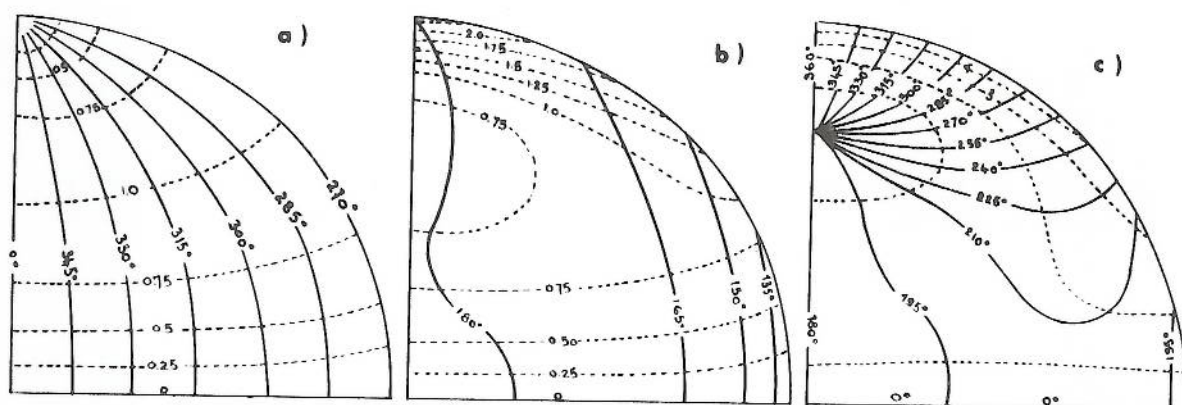


Figure 1-1

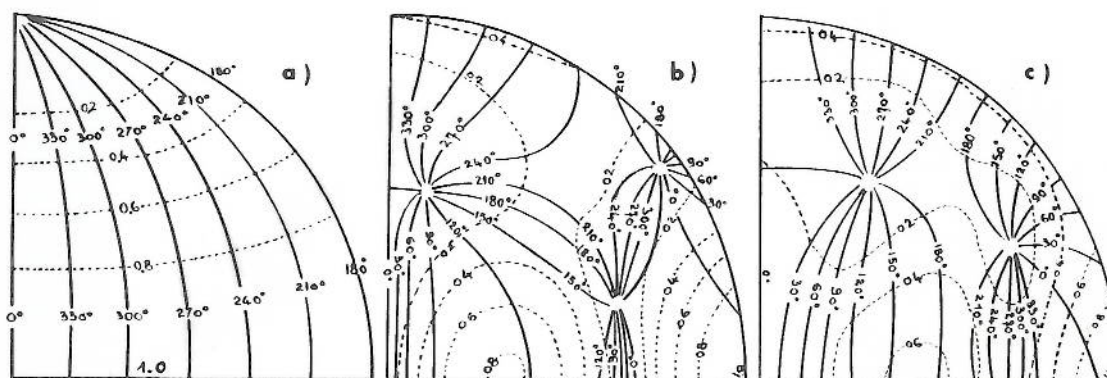


Figure 1-2

Figure 1 — Propagation de la marée dans un océan hémisphérique d'après DEFANT (1961)

— lignes cotidiales

- - - lignes d'isomarnage graduées en valeur du rapport :

$$\frac{\text{amplitude calculée}}{\text{amplitude maximum de la marée statique}}$$

Nota : — Un seul quadrant est représenté, l'équateur et le méridien central étant axes de symétrie
— L'instant origine pour le calcul des phases est l'instant de la pleine mer de la marée statique le long du méridien central

Figure 1-1 Composante K_1
a) H infinie (marée statique)
b) $H = 4420$ m
c) $H = 2880$ m (résonance)

Figure 1-2 Composante K_2
a) H infinie (marée statique)
b) $H = 4920$ m
c) $H = 4420$ m

2.2 - Méthodes empiriques

La première méthode utilisée pour tracer les cartes cotidales consistait à interpoler les données de marée à la côte, sans recours direct à la théorie. Néanmoins, pour le tracé des lignes cotidales dans les zones éloignées de toute côte ou pour lesquelles on n'a pas de renseignement, il faut recourir à des hypothèses, plus ou moins justifiées, sur la propagation de la marée.

La première carte cotidale fut établie par YOUNG en 1807 pour montrer la propagation de la marée autour des îles britanniques. La première carte mondiale est due à WHEWELL (1833 ; figure 2) qui est à l'origine d'une erreur qui a affecté pendant longtemps le tracé empirique des lignes cotidales, à savoir la confusion entre une crête de l'onde et une ligne cotidale.

La vitesse de phase d'une onde progressive en profondeur constante est, en négligeant les effets de la force de Coriolis :

$$c = \sqrt{g H}$$

Donc, les lignes de crête présentent une convexité dans le sens de la propagation dans les parties profondes des bassins. Lorsqu'on les confond avec les lignes cotidales, on obtient des sinuosités exagérées dans le tracé (figure 2). Cette erreur a été corrigée dès qu'on a disposé d'observations directes ou indirectes (à partir des courants) de la marée au large, au début du 20ème siècle.

En effet, compte tenu de la déformation de l'onde, la pleine mer n'a pas lieu forcément au passage de la crête, comme ce serait le cas pour une onde progressive pure. Considérons, par exemple, le cas simple d'une onde unidimensionnelle :

$$h(x, t) = \Lambda(x) \cos (qt - \alpha(x))$$

La position des crêtes et des creux à l'instant t est donnée par :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\text{Soit } \Lambda'(x) \cos (qt - \alpha(x)) + \alpha'(x) \Lambda(x) \sin (qt - \alpha(x)) = 0$$

$$\text{ou } \sin (qt - \alpha(x) + \varphi(x)) = 0$$

$$\text{avec } \varphi(x) = \text{Arc tg } \frac{\Lambda'(x)}{\alpha'(x) \Lambda(x)}$$

Les extrémums pour une position fixée vérifient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$\text{soit } \sin (qt - \alpha(x)) = 0$$

La coïncidence entre le passage d'une crête ou d'un creux et un extrémum n'a lieu que pour :

$$A'(x) = 0$$

ce qui correspond à une onde progressive qui ne se déforme pas.

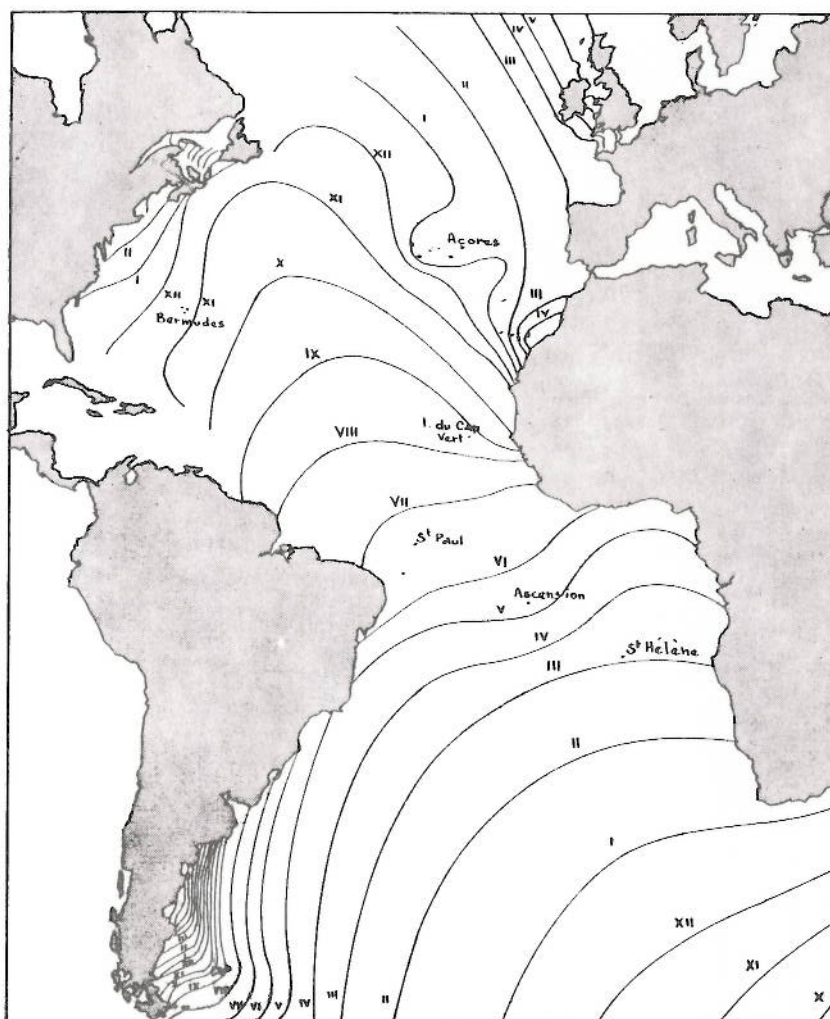


Figure 2 — Lignes cotidales de l'Océan Atlantique. WHEWELL (1833)
Les heures de pleine mer sont en temps moyen lunaire de Greenwich
d'après VILLAIN(1952)

Pour combler les lacunes des observations disponibles, l'Américain HARRIS a introduit en 1904 le phénomène de résonance. Pour cela, il divise les océans en bassins, appelés aires oscillantes, dont une période propre est voisine d'une période des termes du potentiel générateur. L'exemple le plus simple est celui du bassin rectangulaire de profondeur constante H et de longueur L qui peut être le siège d'une onde stationnaire avec nodale au milieu du bassin et dont la période est $T = \frac{2L}{\sqrt{gH}}$. La nodale sépare le bassin en deux plages cotidales où la phase est constante.

On ne peut pas, évidemment, diviser l'océan en de tels bassins complètement fermés. Mais, en se fondant sur les résultats de l'hydrodynamique, dans les cas les plus simples, sur les observations des seiches dans les lacs et dans les baies, ainsi que sur des expériences faites dans des bassins artificiels, HARRIS a énoncé un certain nombre de lemmes qui l'ont guidé dans la recherche de bassins non limités sur leur pourtour mais en résonance avec l'une ou l'autre des composantes du potentiel générateur. Il admet, par exemple dans le cas d'une aire rectangulaire, qu'il suffit de trouver deux parties de côte à peu près parallèles (l'une d'entre elles pouvant être remplacée par une barrière sous-marine) de longueurs suffisantes et dont la distance soit un multiple d'un demi-longueur d'onde. Il ne tient pas compte de la courbure de la Terre. Chaque aire oscillante ainsi définie est le siège d'une onde stationnaire caractérisée par des nodales séparant des régions cotidales. En raison des frottements et surtout de la force de Coriolis, il faut en fait remplacer ces régions cotidales par des lignes cotidales plus ou moins serrées selon qu'on se trouve à proximité ou non d'une nodale et par des points amphidromiques à l'intersection des nodales de plusieurs bassins. Les figures 3 et 4 montrent à titre d'exemple les résultats obtenus par HARRIS dans l'océan Atlantique pour l'onde M_2 .

L'Allemand STERNECK (1920) utilise une méthode d'interpolation des observations un peu différente. Ses cartes sont basées sur la décomposition arbitraire de la marée en deux ondes stationnaires :

$$h = A \cos (q (t - t_0)) = A' \cos qt + A'' \sin qt$$

avec $A' = A \cos qt_0$ et $A'' = A \sin qt_0$

Les lignes nodales (A' ou $A'' = 0$) servent de base au tracé des lignes cotidales : la nodale d'une des deux ondes stationnaires est une ligne cotidale particulière de la marée totale.

Les améliorations ultérieures des cartes empiriques sont liées à la multiplication des observations de marée. HARRIS et STERNECK disposaient d'une soixantaine de points de calage dans chacun des océans Atlantique, Indien et Pacifique, tandis que les tracés de l'Allemand DIETRICH (1944) et du Français VILLAIN (1952) intègrent les valeurs connues des constantes harmoniques en respectivement 600 et près de 1 000 localités pour chacun des trois océans.

La méthode empirique a surtout été utilisée, et continue de l'être, pour l'établissement des cartes cotidales limitées à des bassins particuliers. On pourra par exemple consulter l'ouvrage de DEFANT (1961) déjà cité.

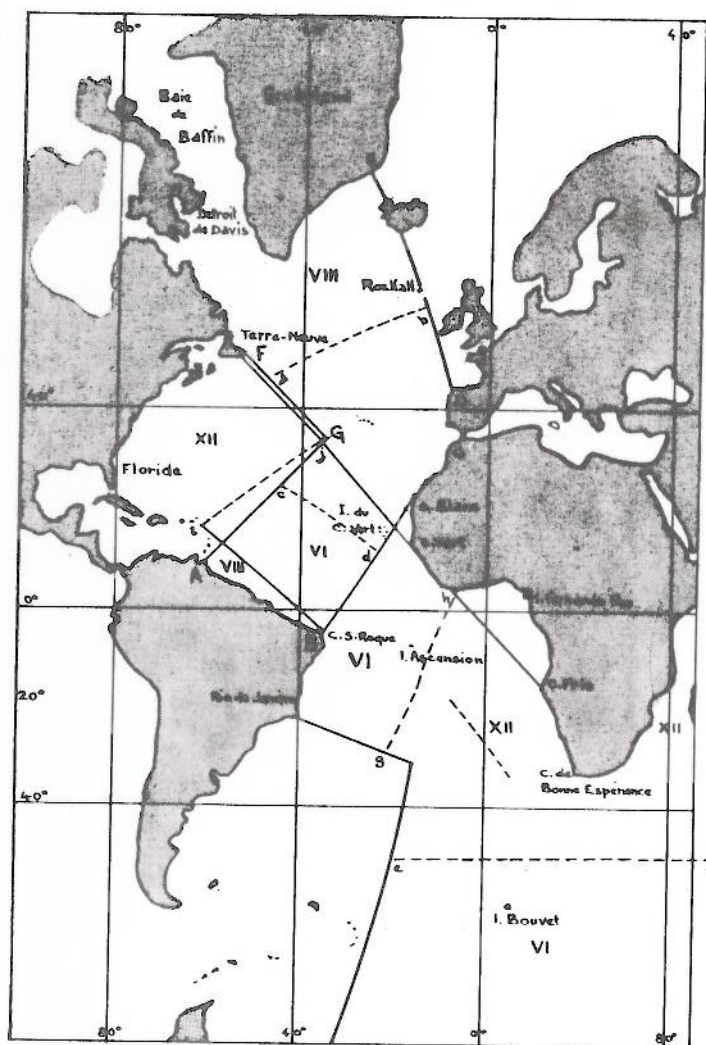


Figure 3 — Aires oscillantes de la marée semi-diurne dans l'Atlantique
 — limites des aires
 - - - nodales
 HARRIS (1904)
 d'après VILLAIN (1952)

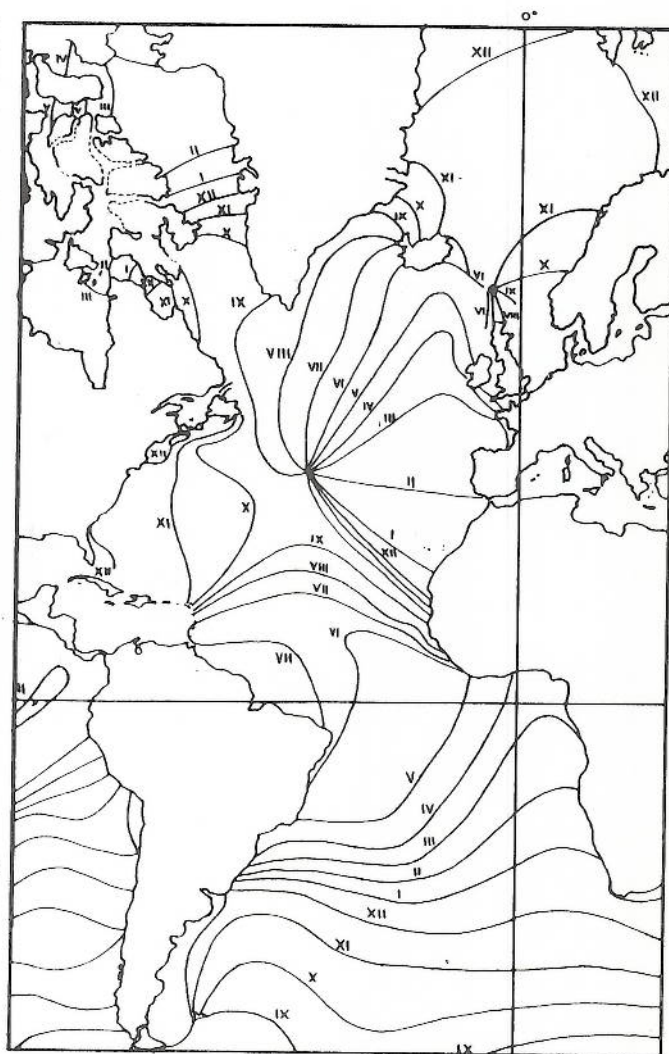


Figure 4 — Lignes cotidales de l'onde M_2 dans l'Atlantique graduées en temps lunaire moyen de Greenwich
 HARRIS (1904)
 d'après VILLAIN (1952)

L'école soviétique (BORIS, NEKRASSOV et surtout BOGDANOV) a publié à partir de 1961 des cartes cotidales pour certaines mers ou océans basées sur la méthode des isohypses. On construit pour chaque heure la carte des isohypses du relief instantané de la surface du bassin (rapporté au niveau moyen) par interpolation des hauteurs aux points de calage où les constantes harmoniques sont connues. Les isohypses de niveau nul à l'instant t coïncident avec les lignes cotidales d'heure $t \pm \frac{T}{4}$ où T est la période de l'onde étudiée. L'avantage de cette méthode est que l'interpolation des hauteurs est en général plus aisée que l'interpolation directe des phases.

2.3 - Méthodes semi-empiriques

Le principal défaut des méthodes empiriques est que l'interpolation entre les points de calage conserve un caractère d'autant plus arbitraire que les observations disponibles sont plus dispersées.

Les méthodes semi-empiriques sont basées sur la résolution "à la main" des équations de la marée, à partir des observations de marée (et de courant) disponibles.

Considérons le cas simple d'un bassin à fond plat et horizontal centré autour du point 0 de latitude L et de longitude G . Introduisons le repère orthonormé $Oxyz$ d'origine 0, d'axe Oz dirigé suivant la verticale ascendante en 0, d'axe Ox horizontal dirigé vers l'Est et d'axe Oy horizontal dirigé vers le Nord (figure 5). On néglige dans la suite la courbure de la Terre au voisinage de 0.

Les équations linéarisées s'écrivent, en coordonnées cartésiennes (cf chapitre VI) :

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \left(\frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{Au}{H} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{Av}{H} \end{cases}$$

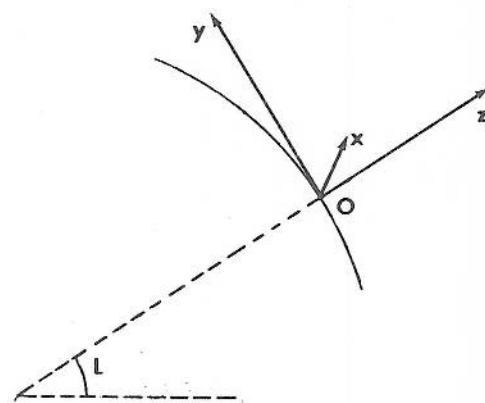


Figure 5

où u et v sont respectivement les composantes Ouest-Est et Sud-Nord du courant et f le facteur de Coriolis ($f = 2\omega \sin L$).

On a admis une loi linéaire pour le frottement sur le fond. Pour un bassin d'étendue limitée, on peut négliger, en première approximation, l'action directe du potentiel générateur et le facteur de Coriolis.

Un cas particulièrement simple est celui d'un bassin allongé. En prenant l'axe des x dans la direction du bassin et en supposant que les courants traversiers sont négligeables, les équations se simplifient en :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial Hu}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = - g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{Au}{H} \end{cases}$$

et se combinent :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial Hu}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g \frac{\partial^2 Hu}{\partial x^2} + \frac{A}{H} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Les solutions du type :

$$\begin{cases} u(x, t) = U(x)e^{iqt} \\ h(x, t) = Z(x)e^{iqt} \end{cases} \quad (U \text{ et } Z \text{ complexes})$$

vérifient les équations :

$$\begin{cases} iqZ = - \frac{\partial HU}{\partial x} \\ (q^2 - iq \frac{A}{H}) U + g \frac{\partial^2 HU}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

qui peuvent être intégrées numériquement, lorsque $H(x)$ est connu, à partir des conditions aux limites aux extrémités du bassin.

Les variations transversales de h peuvent être éventuellement déterminées à l'aide de la deuxième équation dynamique dans laquelle on néglige v :

$$\frac{\partial h}{\partial y} = - \frac{f}{g} u$$

Les cartes cotidales données par DEFANT pour des bassins allongés (Adriatique ; baie de Fundy) ont été établies par des méthodes de ce type.

Les méthodes semi-empiriques ont été utilisées également pour des bassins à deux dimensions mais elles ont été abandonnées dès que sont apparues les possibilités de calcul numérique sur ordinateur.

2.4 - Les modèles numériques

L'apparition des ordinateurs et le développement de leurs capacités de mémoire ont permis de mettre en oeuvre des techniques de résolution numérique automatiques des équations de la marée.

Les premiers résultats obtenus par cette méthode sont ceux de l'Allemand HANSEN (1949, 1952) pour l'onde M_2 dans l'Atlantique Nord.

La méthode la plus couramment utilisée est celle des différences finies utilisant deux réseaux imbriqués pour le calcul des courants et des élévations (figure 6).

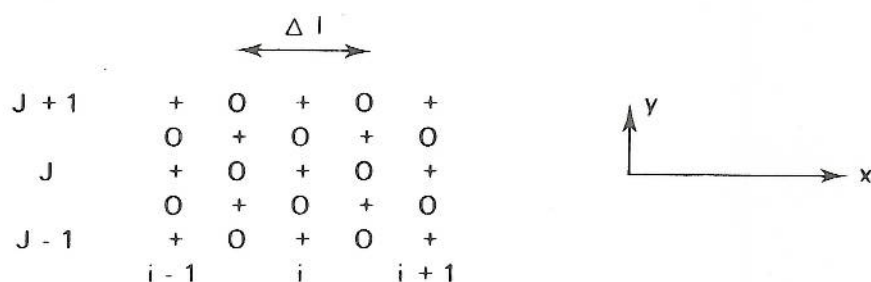


Figure 6 — Maillage utilisé pour la méthode des différences finies
O : point d'élévation
+ : point de courant

Les dérivées sont exprimées à partir des valeurs des fonctions aux noeuds du réseau :

$$\frac{\partial Hu}{\partial x} = \frac{(Hu)_{ij} - (Hu)_{i-1j}}{\Delta l}$$

$$\text{et } \frac{\partial Hv}{\partial y} = \frac{(Hv)_{i-1/2j+1/2} - (Hv)_{i-1/2j-1/2}}{\Delta l}$$

sont associés à $\frac{\partial}{\partial t} h_{i-1/2j}$ dans l'équation de continuité,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1/2j} - h_{i-1/2j}}{\Delta l}$$

est associé à $2fv_{ij}$ et à $\frac{\partial}{\partial t} u_{ij}$ dans la première équation dynamique.

Δl est le pas du réseau, qui est parfois variable.

Le modèle est complété par des conditions aux limites terrestres ou océaniques. Le long des côtes, on impose que la composante normale de la vitesse soit nulle ; aux frontières océaniques, on fixe la hauteur ou une combinaison linéaire de la hauteur h et de la vitesse (u, v).

Pour obtenir la marée observable, c'est-à-dire rapportée à l'écorce terrestre, il faut en outre introduire, dans les équations dynamiques, les mouvements du fond dus à la marée terrestre propre et à l'effet de surcharge des océans qui varie avec la marée (marée dite de charge). La marée terrestre (amplitude de l'ordre de 15 cm) est déduite de la théorie statique (voir chapitre IV) ; la marée de charge (amplitude de l'ordre de plusieurs centimètres) est déduite, par une relation linéaire, de la marée océanique.

Si on utilise la forme linéarisée des équations, on peut chercher des solutions sous forme d'exponentielles complexes Ae^{iqt} et diviser les équations par e^{iqt} pour ne chercher que les amplitudes (complexes) A . Mais on préfère habituellement conserver la dépendance en temps. La solution est calculée à partir du repos, par discrétisation dans le temps, jusqu'à obtention d'un mouvement stationnaire. Cette méthode permet de tenir compte des termes non linéaires. Le pas de temps Δt et le pas d'espace Δl ne sont pas indépendants : les conditions de stabilité numérique imposent la relation :

$$\frac{\Delta t}{\Delta l} < \frac{1}{\sqrt{2gH_{\max}}} \quad (\text{critère de COURANT})$$

Les solutions obtenues diffèrent parfois considérablement d'un auteur à l'autre. En particulier, elles sont très sensibles au mode de représentation du fond d'une part et à la façon de prendre en compte les frottements d'autre part.

La difficulté principale réside dans une définition des côtes et des fonds suffisamment fine pour être compatible respectivement avec les conditions aux limites et avec la variabilité du phénomène. Pour surmonter cette difficulté, dans les modèles globaux (dont le maillage est actuellement au mieux de $1^\circ \times 1^\circ$), on remplace la condition de glissement sans frottement par un transfert d'énergie de l'océan vers les mers littorales. Ce transfert est exprimé par une condition du type :

$$Hv_n = \lambda \sqrt{g H'} h$$

où h est l'élévation de la surface le long de la limite océan-mer littorale, v_n la vitesse normale à la limite du côté océanique et λ un paramètre, éventuellement complexe, déterminé empiriquement.

Pour $\lambda = 0$, on retrouve la condition de vitesse normale à la côte nulle qui est adaptée en cas d'une côte sans plateau continental.

Pour $\lambda = 1$, on exprime que la vitesse et la dénivellation sont en phase et que toute l'énergie de la marée océanique est transmise à la mer littorale où elle sera dissipée par frottement.

En effet, considérons un écoulement unidimensionnel obéissant aux équations (2) (voir § 2.3), où l'axe des x est normal à la limite du plateau continental (Fig. 7) et avec les hypothèses supplémentaires :

$$H = \text{constante} ; H' = \text{constante} ; A \text{ négligeable.}$$

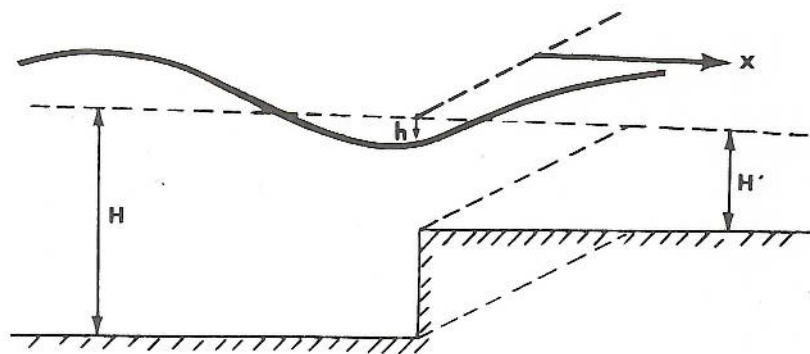


Figure 7

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = - H \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = - g \frac{\partial h}{\partial x} \end{cases}$$

Cherchons la solution sous la forme d'une onde progressive de célérité c :

$$h(x, t) = F(x - ct)$$

On obtient, à partir de la première équation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c}{H} F'(x - ct)$$

soit $u = \frac{c}{H} F(x - ct) = \frac{c}{H} h$, si $u = 0$ pour $h = 0$.

La deuxième équation devient :

$$-\frac{c^2}{H} F'(x - ct) = -g F'(x - ct)$$

d'où la relation classique :

$$c = \sqrt{gH}$$

et
$$\frac{u}{h} = \frac{\sqrt{gH}}{H}$$

de même (3)
$$\frac{u'}{h} = \frac{\sqrt{gH'}}{H'}$$

L'équation de continuité à la limite du plateau continental s'écrit :

$$(h + H) u = (h + H') u'$$

soit, en négligeant h devant H et H' et en remplaçant u' par sa valeur tirée de (3) :

$$Hu = h \sqrt{gH'}$$

Lorsque le modèle utilisé ne fait intervenir que le potentiel générateur et la bathymétrie (et éventuellement des hypothèses sur la marée terrestre), les observations à la côte ou au large permettent de contrôler sa validité. La comparaison n'est pas très favorable en général. Aussi préfère-t-on actuellement, pour les modèles globaux comme pour les modèles régionaux, ajuster le modèle (par l'intermédiaire des conditions aux limites et/ou des coefficients numériques) aux observations le long des limites côtières. Ces observations ne peuvent plus servir pour tester le modèle et il faut recourir à des indicateurs indirects comme l'effet de surcharge océanique sur la marée terrestre et les perturbations des orbites des satellites. Ces indicateurs ne sont sensibles qu'aux caractéristiques globales du modèle. De ce point de vue, les meilleurs modèles actuels sont ceux qui "interpolent" les observations disponibles et relèvent donc en fait du principe des méthodes semi-empiriques.

Signalons enfin l'existence de modèles tridimensionnels mis au point pour des mers littorales ou des portions de ces mers. Ils permettent d'étudier les variations de la vitesse le long de la verticale mais, en ce qui concerne l'élévation de la surface libre, les résultats obtenus ne sont pas très sensiblement meilleurs que ceux obtenus à l'aide de modèles bidimensionnels.

2.5 - Les modèles hydrauliques

Pour pallier la méconnaissance des conditions aux limites, on a recours parfois aux modèles réduits. Ceux-ci offrent de meilleures possibilités de réglage que les modèles numériques, lorsqu'ils permettent d'effectuer des mesures précises.

Ces modèles sont en général basés sur le critère de similitude de Froude : si X et Z sont les échelles horizontales et verticales, les échelles de temps et de vitesse sont respectivement :

$$T = \frac{X}{\sqrt{Z}} \quad \text{et} \quad V = \frac{X}{T}$$

ce qui assure la conservation du nombre de Froude $\frac{|\vec{v}|}{\sqrt{gH}}$,

Cette méthode est surtout réservée à l'étude des bassins de faible étendue car la modélisation des mers complètes est délicate et onéreuse. Le modèle le plus connu est celui de la plaque tournante de l'Institut de Mécanique de Grenoble sur laquelle CHABERT D'HIERES et LE PROVOST ont étudié la marée en Manche de 1962 à 1974. La rotation de la plaque simule l'accélération de Coriolis. L'onde à étudier est introduite par un générateur qui impose un champ de vitesses à la limite Atlantique. Des canaux d'amortissement et de réglage permettent de simuler l'effet de la Mer du Nord (figure 8).

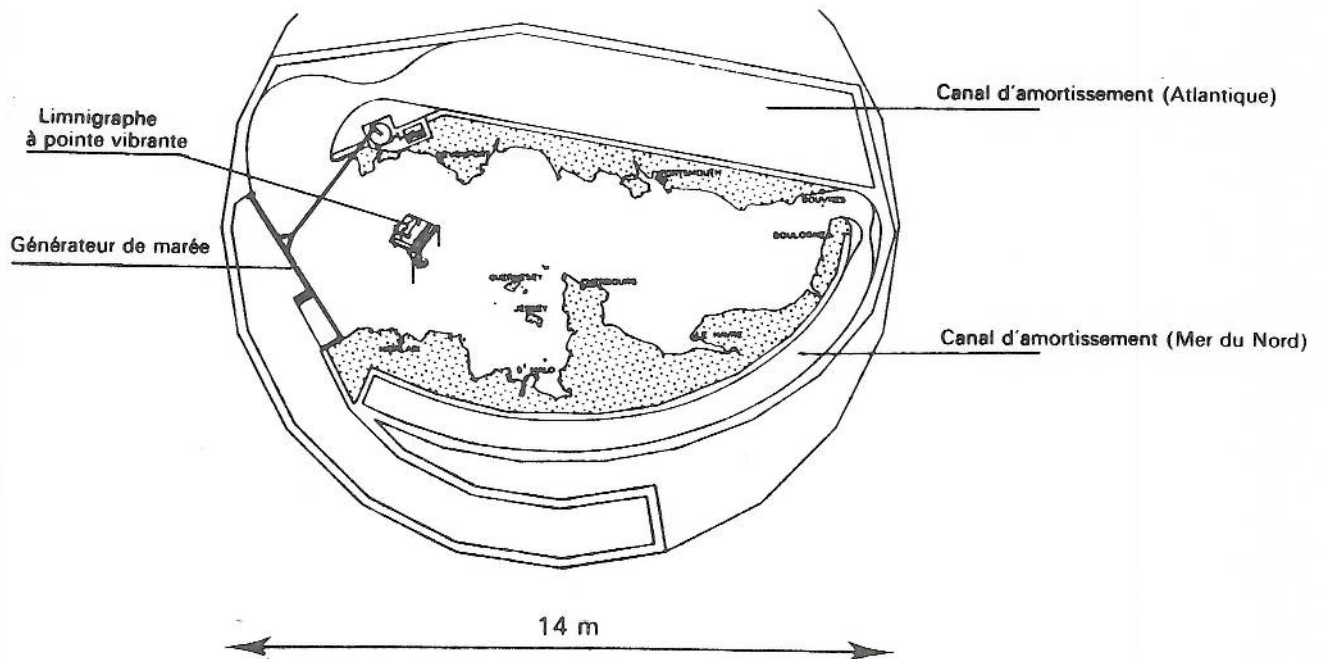


Figure 8 — Vue générale du modèle tournant de la Manche réalisé par l'Institut de Mécanique de l'Université de Grenoble

Echelle horizontale 1/50 000

Echelle verticale 1/2250

Vitesse de rotation 0 à 4 tours/minute

3 - LES MAREES OCEANIQUES

Les cartes cotidales des océans établies par divers auteurs selon l'une ou l'autre des méthodes décrites au paragraphe précédent diffèrent considérablement les unes des autres. Les modèles établis indépendamment des observations s'en écartent notablement et, actuellement, seuls les modèles d'interpolation paraissent fiables. Les cartes empiriques de DIETRICH et VILLAIN sont toujours citées comme termes de comparaison.

L'onde M_2 est celle pour laquelle on dispose du plus grand nombre de solutions indépendantes ; citons, parmi les plus récentes, celles de ZAHÉL (1977), PARKE et HENDERSHOTT (1980) et SCHWIDERSKI (1980). On trouve ensuite S_2 et plus rarement K_1 et O_1 . SCHWIDERSKI, aux Etats-Unis, vient d'établir un atlas complet des cartes mondiales pour M_2 , S_2 , N_2 , K_2 , K_1 , O_1 , P_1 et Q_1 basé sur un modèle d'interpolation.

Les figures 9 et 10 représentent les cartes établies pour M_2 , respectivement par VILLAIN (1952) et par ZAHÉL (1977). Le modèle de ZAHÉL utilise un maillage de $1^\circ \times 1^\circ$ et n'est pas ajusté aux observations. La comparaison de ces deux cartes montre bien le degré d'insuffisance de notre connaissance des marées océaniques.

La propagation de l'onde M_2 est relativement bien déterminée dans l'Atlantique Nord. Il y a trois points amphidromiques, situés respectivement entre les îles Féroé et l'Islande, au Sud du Groenland et aux Antilles, autour desquels les lignes cotidales tournent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, sous l'effet de la force de Coriolis. Dans l'Atlantique Sud, la situation est moins claire. Les cartes empiriques (figure 9) indiquent une progression régulière vers le Nord tandis que les modèles (à l'exception de celui de PARKE et HENDERSHOTT) montrent une amphidromie très importante dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sous l'effet combiné du frottement et de la force de Coriolis) dont l'existence reste incertaine. Il y a un maximum de l'amplitude (plus de 1 m) au large du Brésil.

La présence d'un certain nombre d'îles bien réparties dans l'Océan Indien, où des observations ont pu être effectuées, a permis de construire une carte empirique précise (figure 11) qui est généralement en accord avec les cartes antérieures (figure 9) ou avec les modèles (figure 10). On notera en particulier l'amphidromie directe entre l'Inde et la corne de l'Afrique, la plage cotidale relativement étendue centrée au voisinage de Diégo Garcia et l'augmentation rapide de l'amplitude entre la côte de l'Afrique et la pointe Nord de Madagascar.

C'est dans l'océan Pacifique que la situation est la plus confuse, sans doute à cause de son étendue (qui rend difficile l'interpolation entre les observatoires) et du peu d'observations disponibles dans certaines zones. Le nombre, la position et le sens de rotation des amphidromies varient fortement d'un modèle à l'autre.

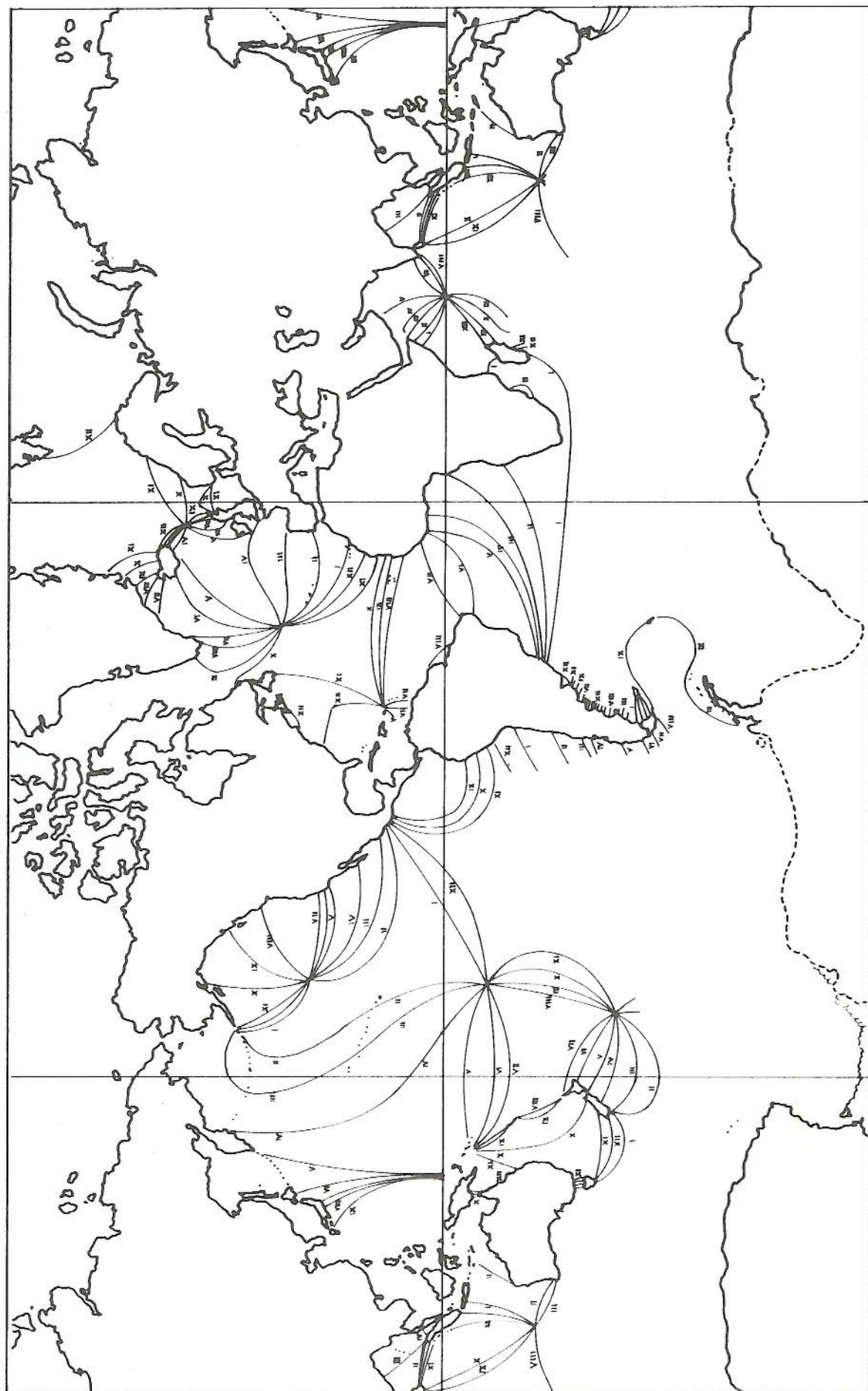


Figure 9 — Carte cotidiale de M_2 (en heures de temps lunaire moyen de Greenwich)
(VILLAIN, 1952)

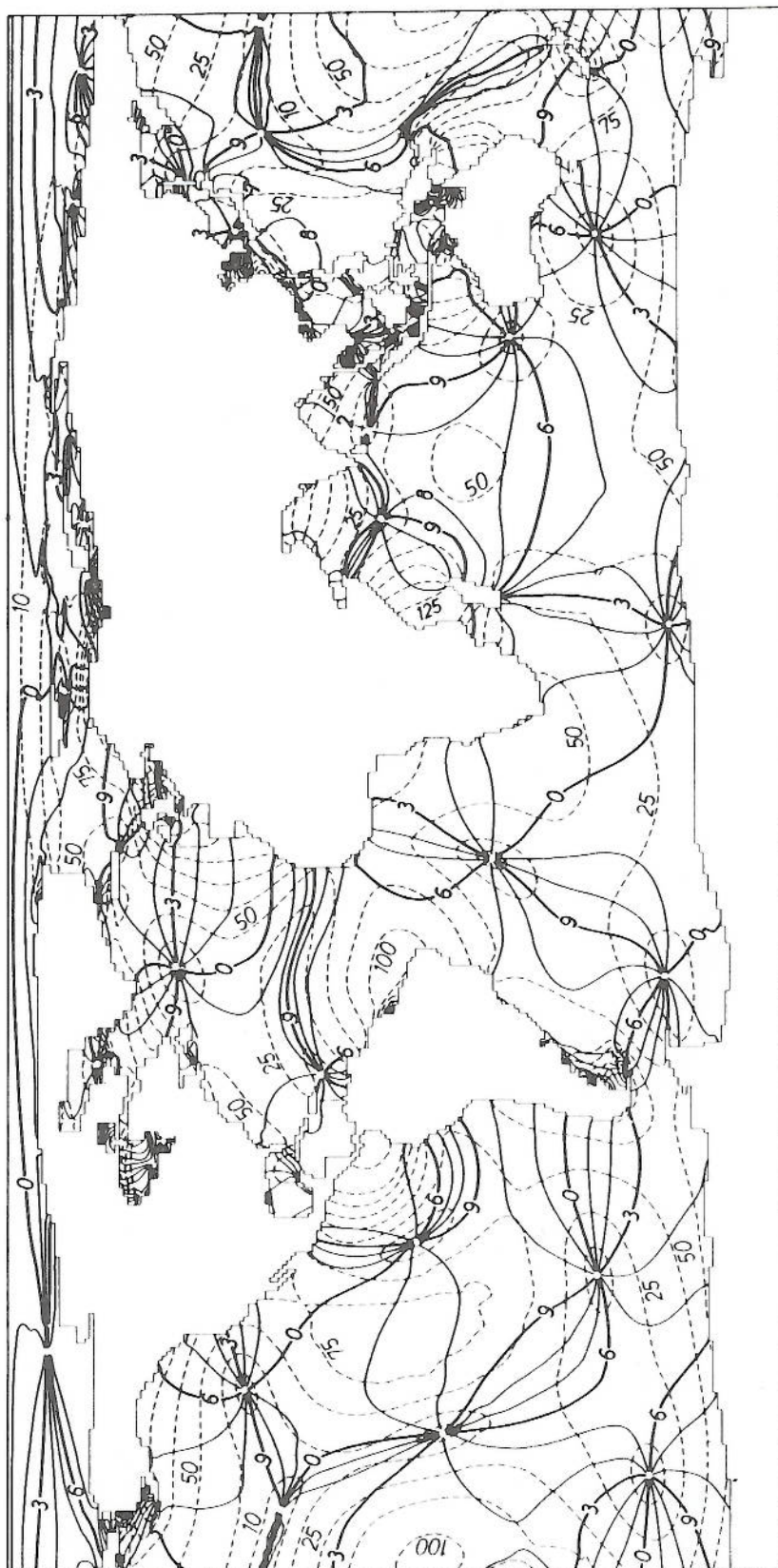


Figure 10 — Carte cotidiale de M_2 (ZAHTEL, 1977)
 — lignes cotidiales en heures de temps moyen lunaire de Greenwich
 - - - lignes d'isomarnage (amplitude en cm)

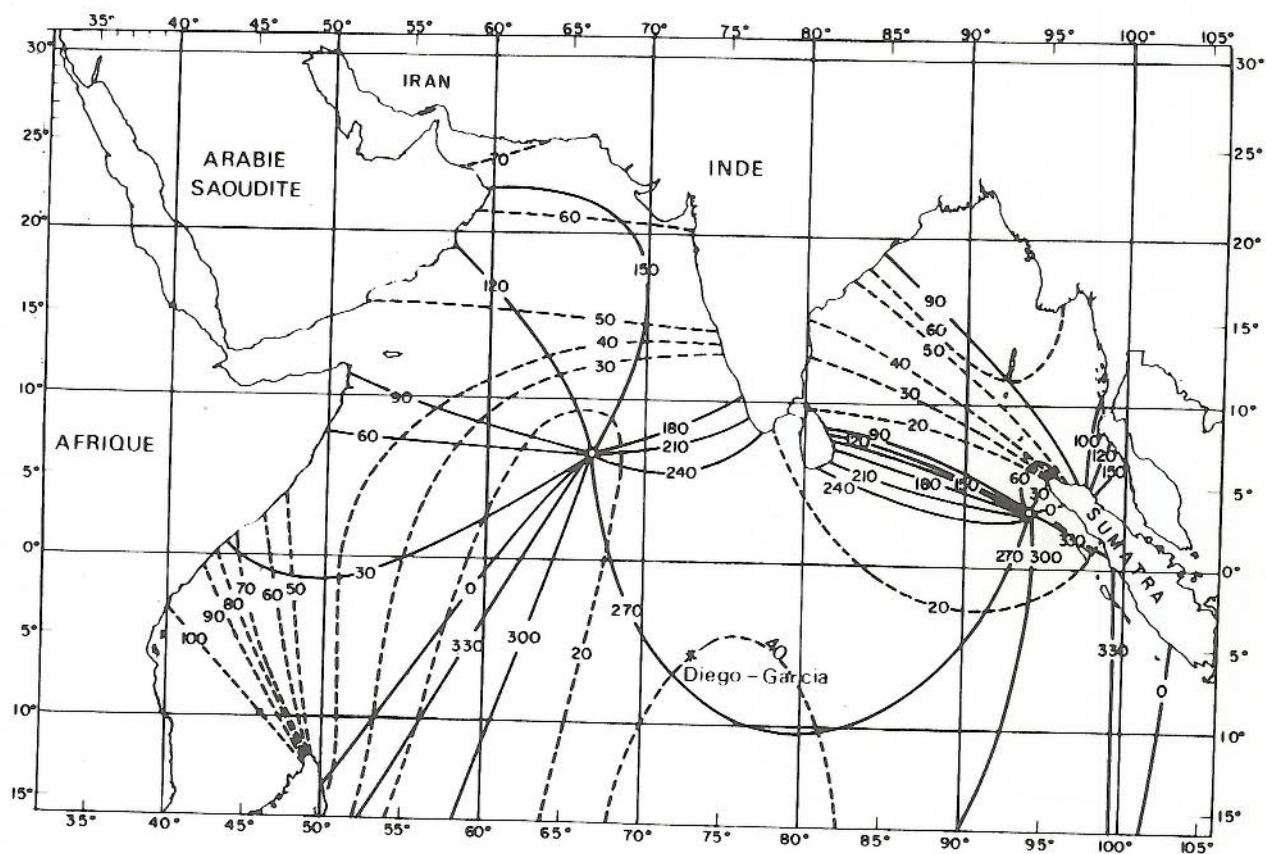


Figure 11 — Carte cotidale de l'onde M_2 dans l'Océan Indien
 — lignes cotidales (situation relative UT en degrés)
 - - - lignes d'isomarnage (amplitude en cm)
 (MAC CANNON et WUNSCH, 1977)

4 - LES MAREES LITTORALES

La détermination directe des marées littorales est plus simple car les étendues géographiques en cause sont limitées et plus favorables aux observations nombreuses. Leur modélisation selon les principes indiqués au paragraphe 2 reste délicate en ce qui concerne la représentation des termes non linéaires et des conditions à la limite océanique qui ne sont pas toujours suffisamment bien connues.

Le passage du régime océanique au régime littoral résulte essentiellement de la diminution parfois assez "brutale" (c'est-à-dire avec une pente supérieure à 10°) de la profondeur à la limite du plateau continental. Le marnage n'est plus négligeable devant la profondeur des mers littorales et les effets de paroi prennent de l'importance. Les plateaux continentaux sont le lieu privilégié de la dissipation de l'énergie des marées (voir § 6).

En raison de la taille relativement réduite des mers littorales, la marée n'y est plus entretenue directement par le potentiel générateur : elle est induite par la marée océanique qui intervient dans les conditions aux limites. D'une manière générale, l'influence du plateau continental se traduit par une amplification des ondes semi-diurnes pouvant aller jusqu'à la résonance (baie de Fundy par exemple). Les ondes diurnes ne sont pas trop affectées. Ainsi entre le point A ($47^\circ 30'N$; $8^\circ 30'W$) situé sur le talus continental et Brest (figure 12) l'amplitude de M_2 passe de 1,2 à 2,0 m tandis que l'amplitude de K_1 reste voisine de 7 cm.

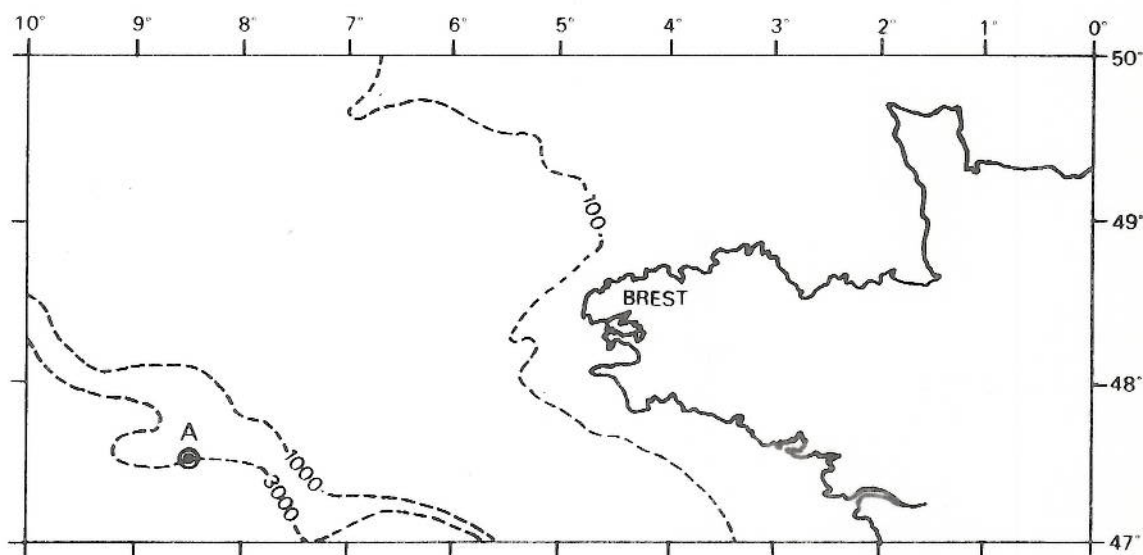


Figure 12 — (Extrait de la carte marine 5588)

Parallèlement à cette modification des ondes induites, les marées littorales sont aussi caractérisées par la génération sur place par des mécanismes non linéaires (frottement, advection) de nouvelles composantes qui sont les ondes de petits fonds. Celles-ci sont parfois inséparables des contributions astronomiques de même fréquence (par exemple $2MN_2$ et L_2 ; $2MS_2$ et μ_2) d'où le comportement apparemment erratique de l'onde résultante par rapport aux ondes purement induites.

Les modèles physiques et surtout numériques des marées littorales se sont considérablement perfectionnés depuis les années 1950 et leur précision est actuellement très satisfaisante. Les constantes harmoniques qu'ils permettent de calculer sont connues en moyenne à quelques centimètres près pour l'amplitude et à quelques degrés près pour la phase. Un maillage fin (pas de quelques kilomètres) et éventuellement variable permet d'appréhender les irrégularités de la bathymétrie et de la côte. L'étude de la sensibilité des résultats à des conditions aux limites variables constitue un procédé commun de sélection des points d'observation in situ de ces conditions aux limites.

Les figures 13 à 15 illustrent trois modes de détermination de l'onde M_2 en Manche. Le modèle physique est basé sur un maillage de 20×20 km tandis que le modèle numérique correspond à un maillage de 5×5 km. On notera la similitude des résultats issus de ces deux modèles et leur meilleure définition par rapport à la carte empirique un peu trop "lissée".

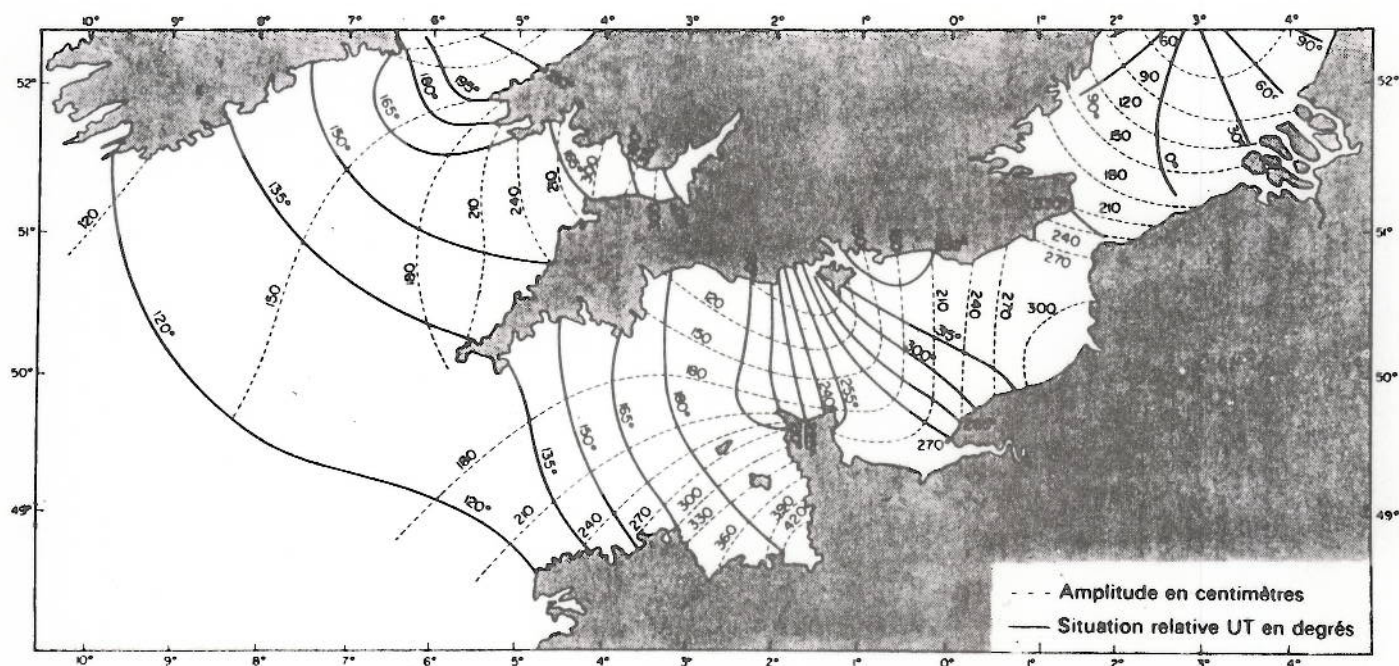


Figure 13 — Carte cotidale empirique de l'onde M_2 en Manche (DEFANT, 1961)

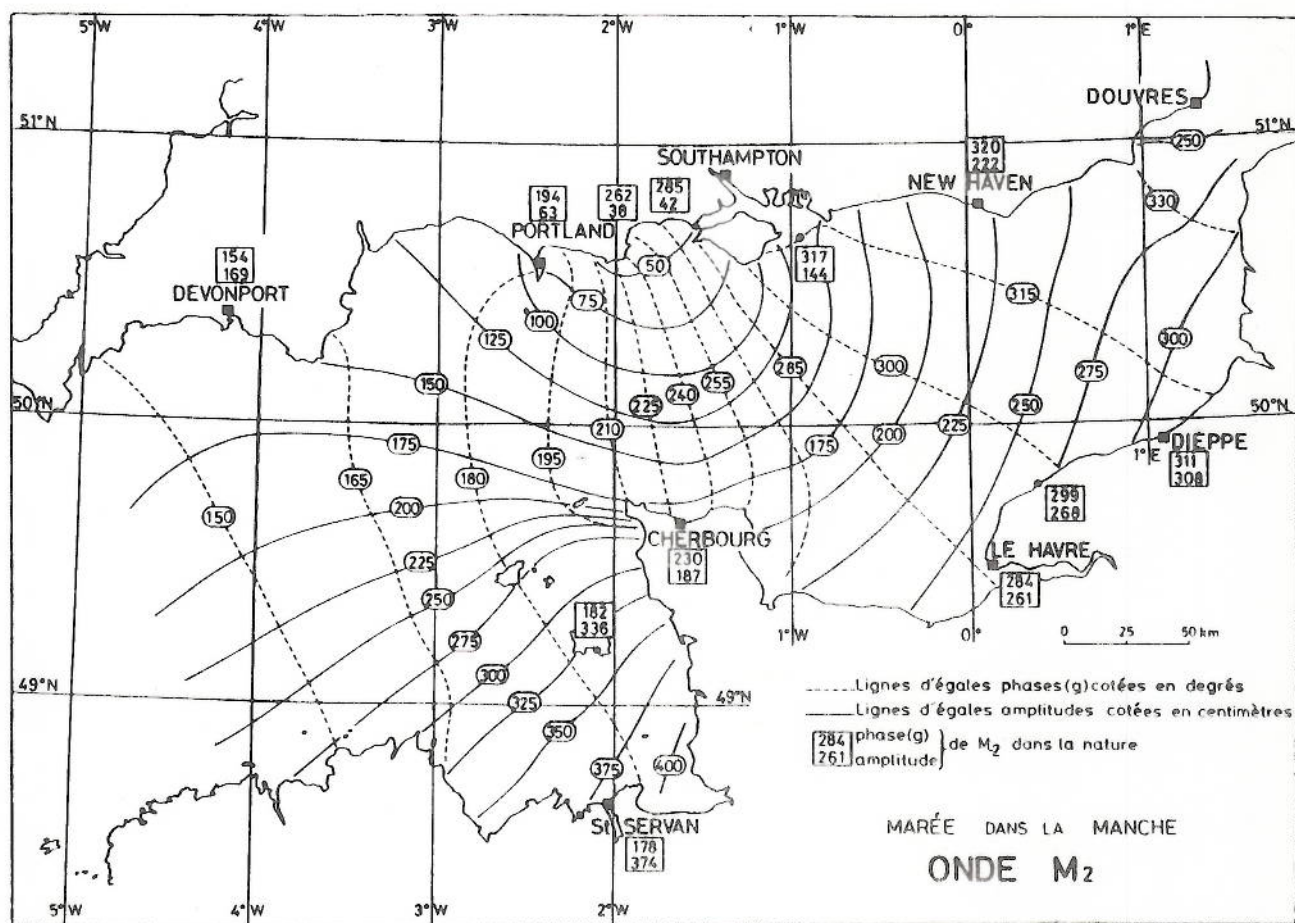


Figure 14 — Carte cotidale de l'onde M_2 déterminée sur la plaque tournante de Grenoble (CHABERT D'HIERES, LE PROVOST, 1977)



Figure 15 — Carte cotidale de l'onde M_2 déduite d'un modèle numérique (PINGREE et MADDOCK, 1978)

Les figures 16 et 17 permettent de comparer, toujours pour la Manche, les résultats déduits du modèle physique de Grenoble et d'un modèle numérique (maillage de 5 milles x 5 milles), pour l'onde M_4 . L'accord est un peu moins bon que pour M_2 mais les amplitudes en cause sont faibles et on atteint le seuil de précision des modèles. La cohérence avec les observations disponibles semble indiquer que les effets non linéaires sont bien maîtrisés. L'existence de deux points amphidromiques de sens rétrograde semble bien établie.

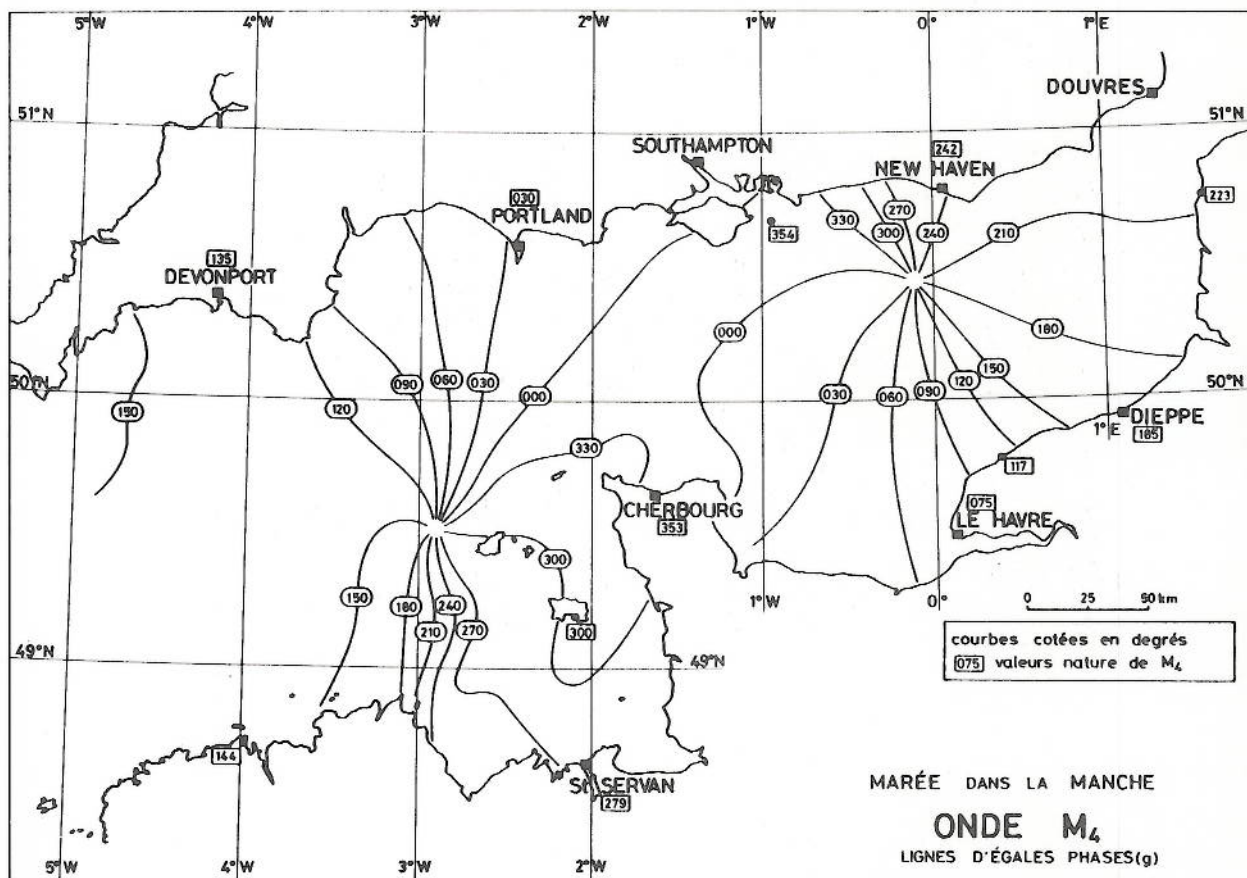
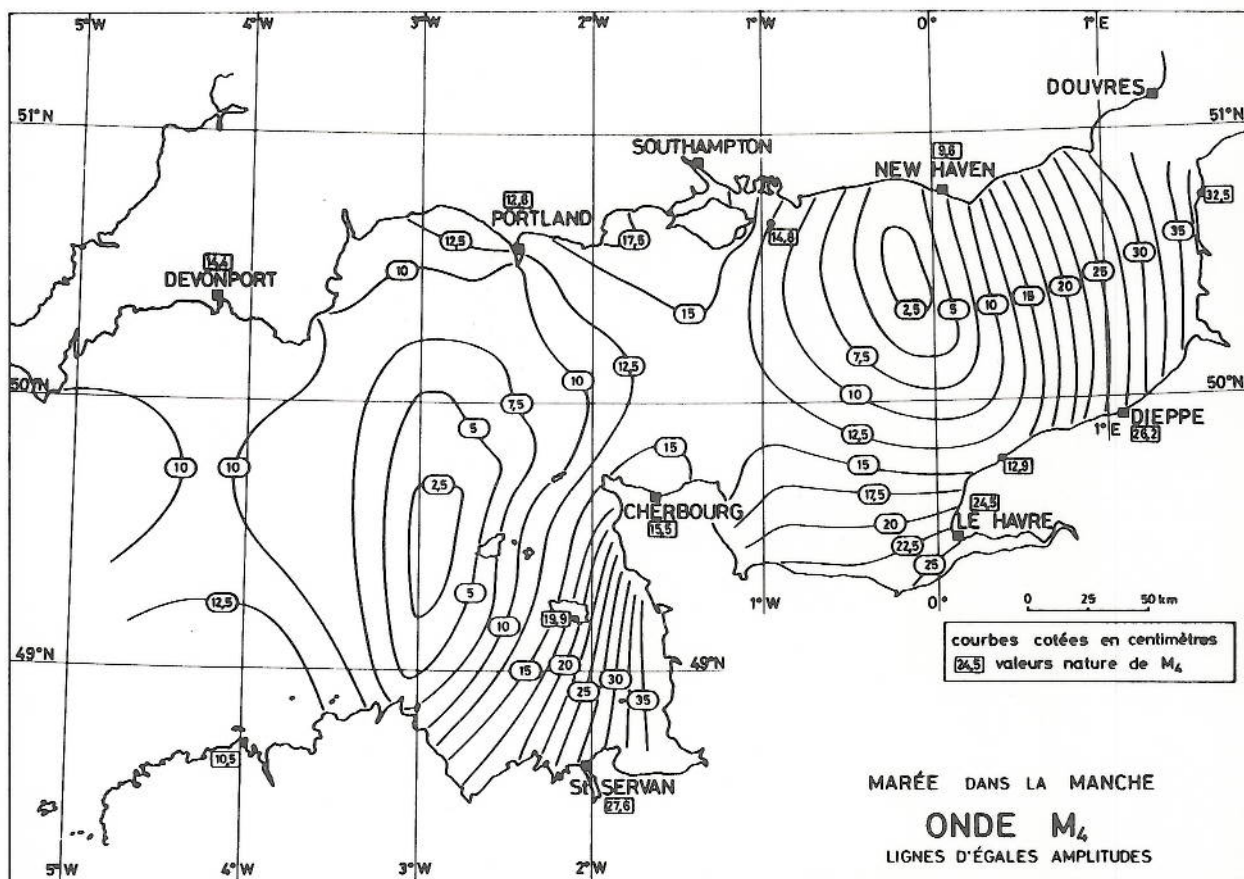


Figure 16 — Carte cotidale de l'onde M_4 en Manche déterminée par la plaque tournante de Grenoble (CHABERT D'HIERES, LE PROVOST, 1978)

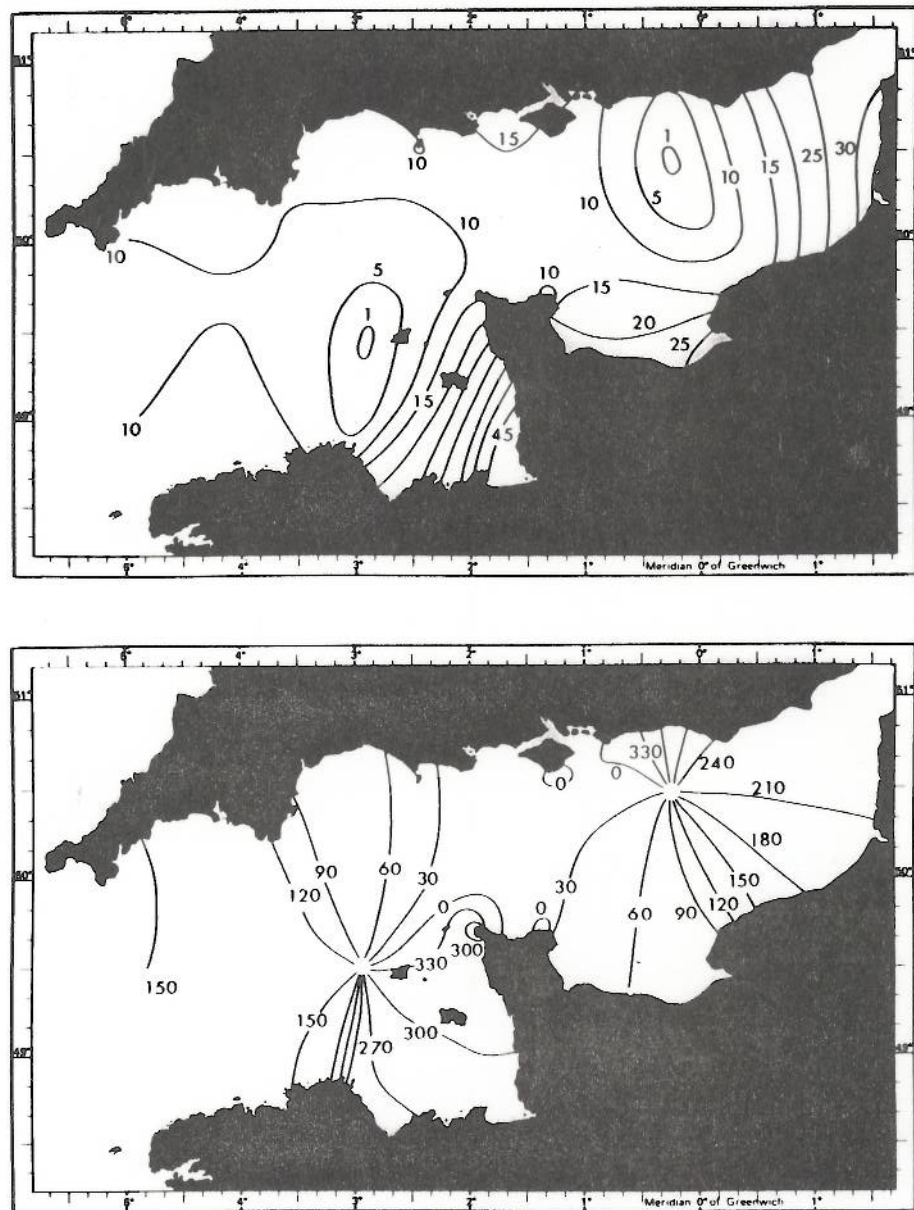


Figure 17 — Carte cotidiale de l'onde M₄ en Manche déduite d'un modèle numérique (PINGREE et MADDOCK, 1978)

5 - LES MAREES FLUVIALES

La marée littorale engendre à l'embouchure d'un fleuve une marée dérivée qui fait sentir ses effets jusqu'à une distance parfois considérable en amont : plus de 1 500 km pour l'Amazone, une centaine de kilomètres pour les grands fleuves français de la côte ouest. Cette marée fluviale se traduit par une élévation du niveau par rapport au régime fluvial pur, que ce soit à marée montante sous l'effet du flot ou à marée descendante pendant laquelle le volume d'eau évacué vers la mer est largement supérieur au débit propre du fleuve. Ceci explique le développement, le long des fleuves à marée, d'un grand nombre de ports dont certains sont parmi les plus importants du monde, comme Rotterdam sur le delta Rhin-Meuse, Anvers sur l'Escaut, Londres sur la Tamise ou Québec sur le Saint-Laurent. En France, on trouve Rouen sur la Seine, Nantes sur la Loire et Bordeaux sur la Garonne.

A cette dimension économique des estuaires, liée à leur navigabilité, il faut ajouter leur rôle éventuel de source froide des grandes centrales thermiques et plus généralement les problèmes d'environnement correspondant à la présence sur leurs berges de grandes zones industrielles. Les marées dans les estuaires ont donc une importance considérable et l'étude de leur propagation a été largement développée.

La marée dans un estuaire est, en première approximation, constante dans une section donnée. En notant s l'abscisse curviligne le long de l'axe du fleuve, on peut décrire la marée par diverses familles de courbes :

- les courbes de marée $h_s(t)$ correspondant à différents points fixes (figure 18) ;
- les profils instantanés $h_t(s)$ pris à différents instants (figure 19 a) ;
- l'enveloppe des profils instantanés, déterminées sur un cycle de marée donné. C'est le lieu géométrique des pleines et basses mers pour le cycle considéré (figure 19 b).

Les hauteurs sont comptées au-dessus d'un même plan horizontal (passant par le zéro hydrographique à l'embouchure ou par le zéro du nivellement général) ou rapportées au niveau des plus basses mers associé à un débit donné (zéro d'étiage de la Gironde par exemple).

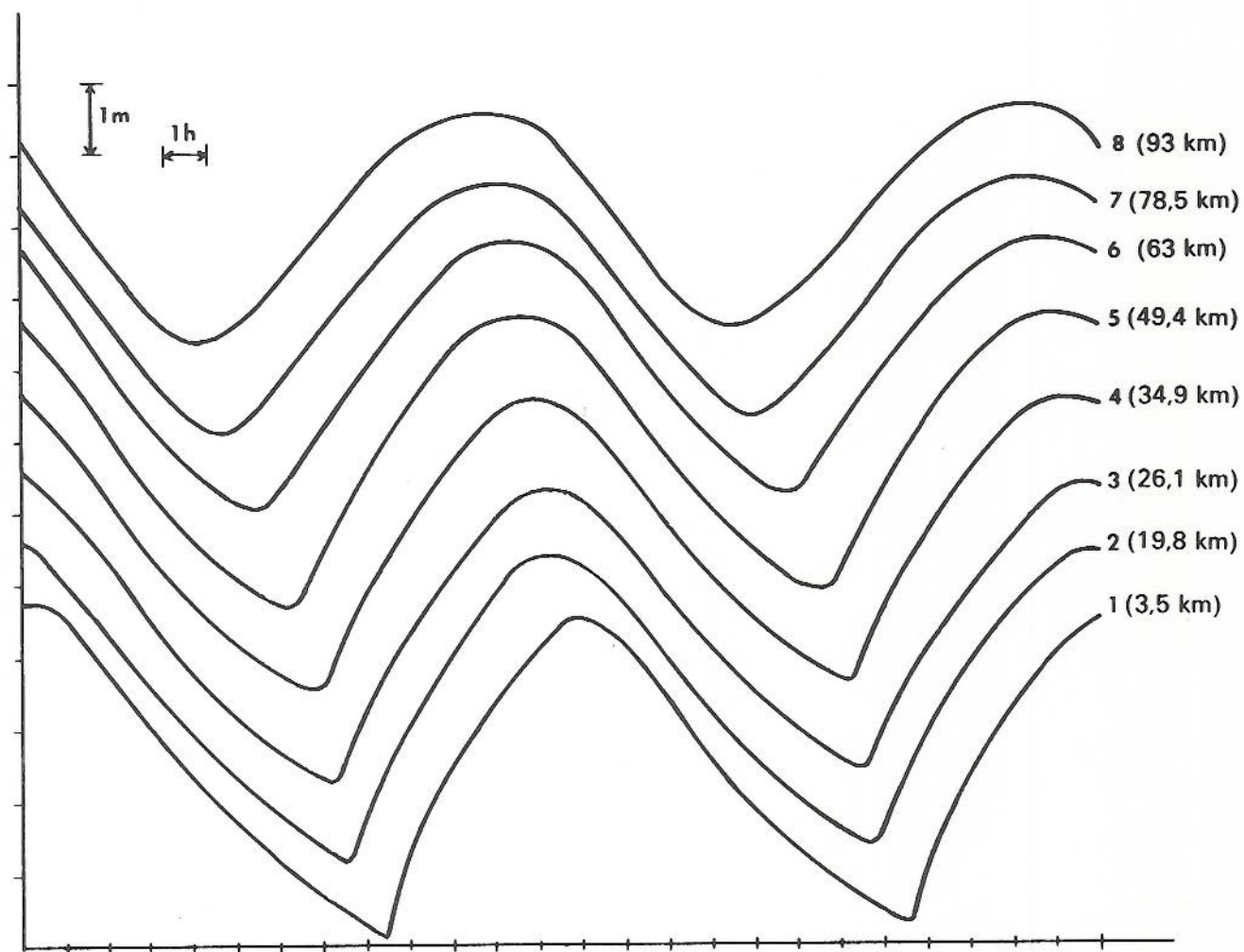


Figure 18 — Marée de la Gironde et de la Garonne. Courbes de marée en marée moyenne.

- | | |
|----------------|---------------|
| 1 - Bordeaux | 5 - Pauillac |
| 2 - Le Marquis | 6 - Lamena |
| 3 - La Reuille | 7 - Richard |
| 4 - Ile Verte | 8 - Le Verdon |

Les nombres entre parenthèses donnent la distance depuis le pont de Pierre à Bordeaux

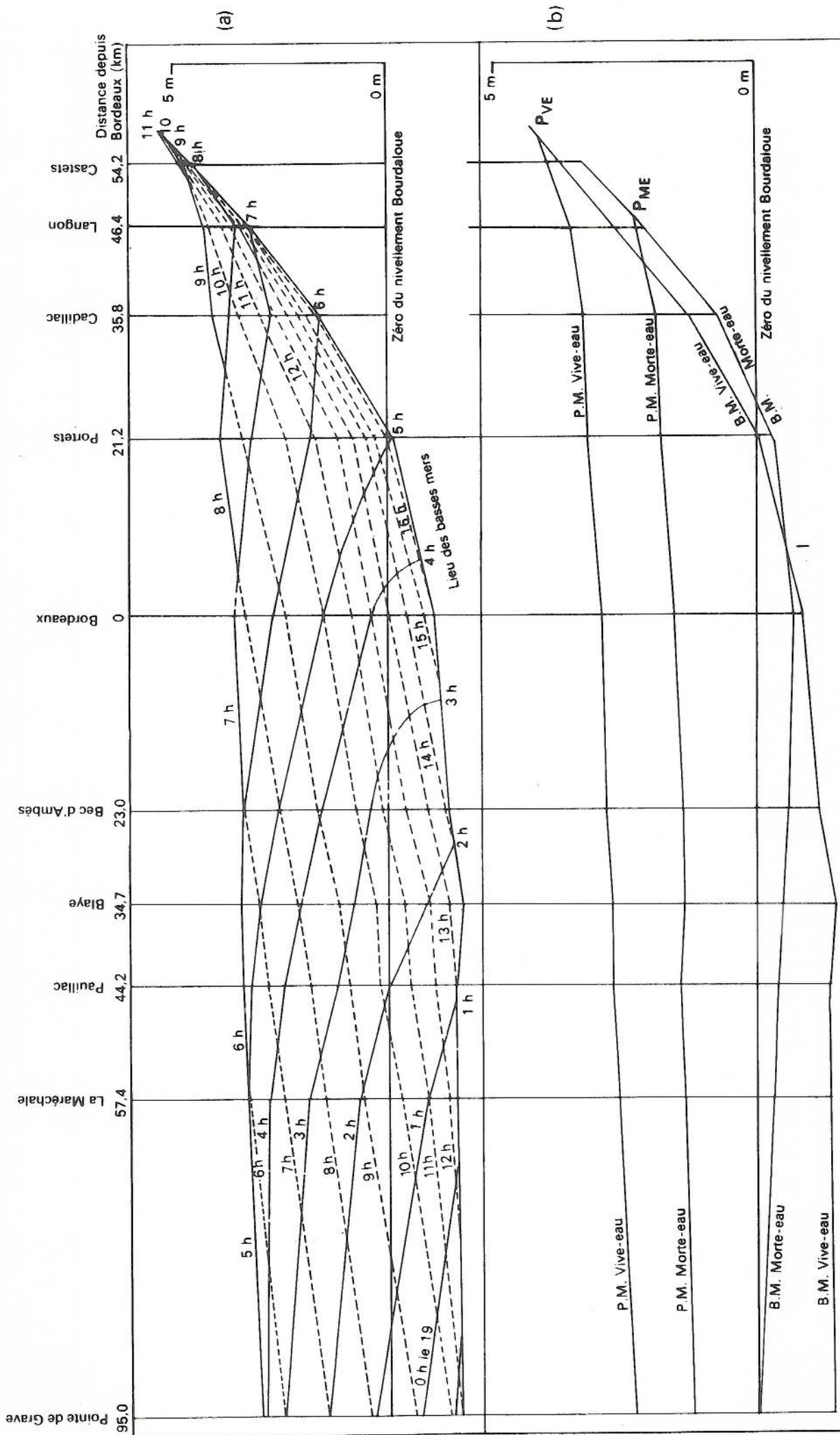


Figure 19 — Marée de la Gironde et de la Garonne
 a) profils instantanés le 19 septembre 1876 (vive-eau)
 Les heures sont en temps civil de la Pointe de Grave
 b) Lieux des pleines mers et des basses mers de vive-eau et de morte-eau des 19 et 26 septembre 1876

La comparaison des courbes obtenues en divers points d'un estuaire (figure 18) met bien en évidence la déformation de la marée au cours de sa propagation vers l'amont. Cette déformation correspond à un élargissement du spectre d'amplitude vers les hautes fréquences des ondes supérieures et composées (figure 20). Les crêtes se propageant plus vite que les creux, il y a raidissement de la courbe de marée à la montée ; ce raidissement conduit dans certains cas à l'apparition d'un mascaret pour lequel la courbe de marée présente une tangente verticale au début de la montée.

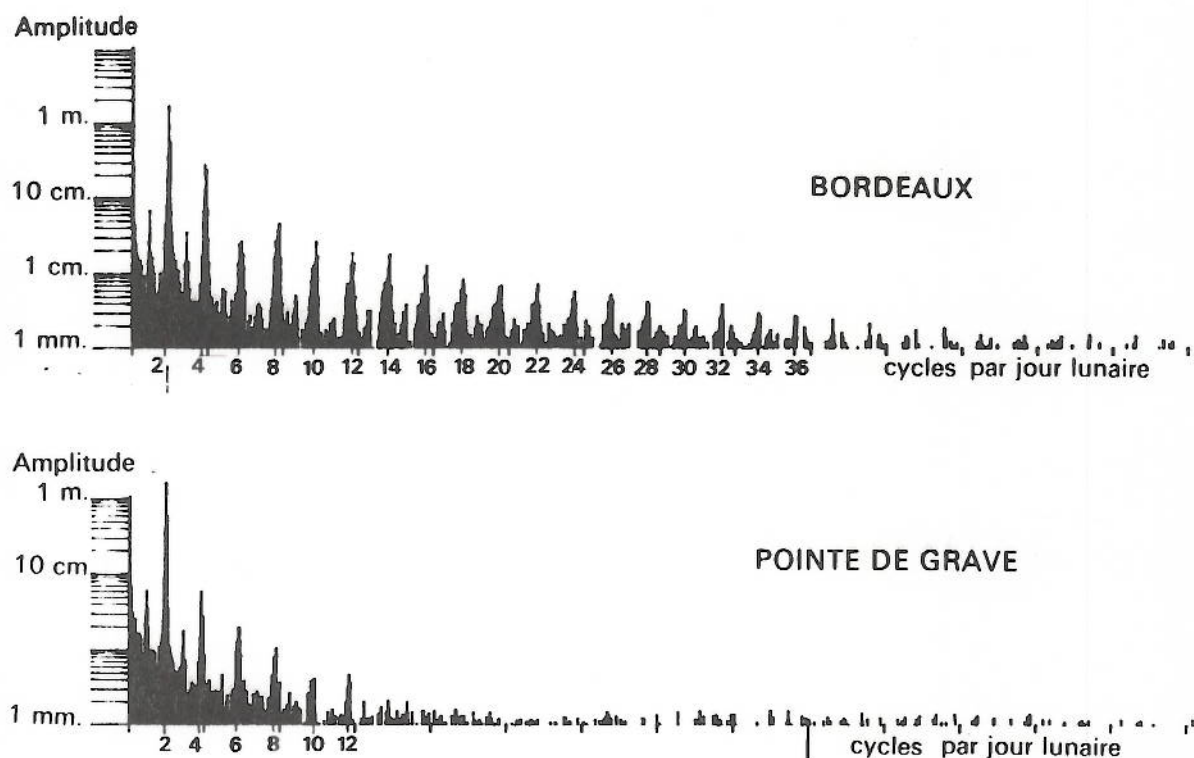


Figure 20 — Spectres d'amplitude de la marée à l'embouchure de la Gironde et à Bordeaux.

L'intersection P des lieux des pleines mers et basses mers d'un cycle donné marque la limite de la zone maritime ; elle se déplace en fonction du marnage à l'embouchure (figure 19).

Le sens de variation des hauteurs de basse mer en fonction du marnage à l'embouchure n'est pas forcément le même en tout point de l'estuaire. En effet, la quantité d'eau introduite pendant le montant en vive-eau n'a pas toujours le temps de s'écouler complètement avant le début du cycle suivant et les basses mers de vive-eau sont alors, en amont, au-dessus des basses mers de morte-eau. Dans ce cas, les lieux des basses mers se coupent en un point I, appelé point caractéristique, où toutes les basses mers ont la même hauteur. Ce point se déplace avec le débit du fleuve.

Le courant qui règne dans la partie maritime d'un fleuve est la superposition du courant variable qui accompagne la marée et du courant dû au débit du fleuve, à peu près constant sur un cycle donné. On appelle flot le courant qui est dirigé dans le sens de propagation de la marée, c'est-à-dire vers l'amont, et jusant le courant orienté vers l'aval. Le jusant est prépondérant du fait du débit du fleuve. Son importance augmente de l'aval vers l'amont jusqu'à la disparition du flot. Les étales de courant sont en retard sur les étales de niveau. La structure verticale du courant dépend du gradient de densité c'est-à-dire de l'efficacité du mélange des eaux fluviales et marines. On pourra observer un changement de direction du courant entre la surface et le fond (estuaire stratifié) ou au contraire un profil de type logarithmique ou parabolique (estuaire bien mélangé).

Les modèles les plus couramment utilisés dans l'étude hydraulique des estuaires sont les modèles physiques, mais le recours aux modèles mathématiques se généralise, permettant en particulier l'étude des phénomènes thermiques, sédimentologiques ou chimiques associés à la propagation de la marée.

Pour l'étude purement dynamique, un modèle à une seule dimension, faisant intervenir le débit à travers une section d'abscisse s , suffit le plus souvent. Lorsque l'estuaire est fortement stratifié, il faut introduire une deuxième dimension dans le plan vertical.

Dans l'état actuel de la technique, les modèles mathématiques sont très gourmands en temps de calcul et se prêtent mal à des études sur de longues périodes. En particulier, les prédictions de marée en estuaire font plutôt appel aux méthodes décrites aux chapitres VIII et IX. L'effet des variations du débit amont est introduit par des procédés statistiques.

6 - ASPECTS ENERGETIQUES

6.1 - Equation de conservation de l'énergie

Les équations linéarisées de la marée s'écrivent sous forme vectorielle (voir chapitre VI) :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div } H\vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\vec{\omega}_A \cdot \vec{v} + g \text{grad } h + \vec{T}_f = \text{grad } V \end{cases}$$

où $\vec{T}_f$ est le terme de frottement sur le fond.

En multipliant la seconde équation par $\rho H\vec{v}$, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho H \vec{v}^2 \right) + \rho g H \vec{v} \cdot \text{grad } h + \rho H \vec{T}_f \cdot \vec{v} = \rho H \vec{v} \cdot \text{grad } V$$

$$\text{or } H\vec{v} \cdot \text{grad } f = \text{div } Hf \vec{v} - f \text{div } H\vec{v}$$

et, en tenant compte de l'équation de continuité, on obtient :

$$H \vec{v} \cdot \text{grad } f = \text{div } Hf \vec{v} + f \frac{\partial h}{\partial t}$$

L'équation de conservation de l'énergie pour une colonne d'eau de section unité s'écrit donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho H \vec{v}^2 + \frac{1}{2} \rho g h^2 \right) + \rho g \text{div } Hh\vec{v} + \rho H \vec{T}_f \cdot \vec{v} = \rho \text{div } H\vec{v} + \rho V \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\text{soit } \frac{\partial E_c}{\partial t} + \frac{\partial E_p}{\partial t} + \text{div } \vec{P} + F = W$$

$$\text{avec } E_c = \frac{1}{2} \rho H \vec{v}^2 : \text{énergie cinétique de la colonne d'eau}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \rho g h^2 : \text{énergie potentielle de la colonne d'eau}$$

$$\vec{P} = \rho g H h \vec{v} : \text{vecteur flux de puissance, qui fait intervenir le déphasage entre le courant } \vec{v} \text{ et la marée } h$$

$$F = \rho H \vec{T}_f \cdot \vec{v} : \text{puissance dissipée par le frottement}$$

$$W = \rho \text{div } H\vec{v} + \rho V \frac{\partial h}{\partial t} : \text{puissance fournie par la force génératrice.}$$

La variation de l'énergie totale d'une portion donnée de l'océan pendant l'unité de temps résulte de la puissance fournie directement par la force génératrice (W) et de la puissance reçue le long de la frontière (P) diminuées de la puissance dissipée par frottement (F).

Pour une onde marée de période T, on obtient, en intégrant sur un intervalle de temps T :

$$\text{div} \quad \langle \vec{P} \rangle + \langle F \rangle = \langle W \rangle$$

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} \rho H \langle \vec{v}^2 \rangle$$

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} \rho g \langle h^2 \rangle$$

$$\text{où} \quad \langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1 + T} f(t) dt$$

L'énergie moyenne de la colonne d'eau est :

$$E = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle$$

L'énergie totale des océans s'obtient par intégration sur la surface des océans :

$$(4) \quad \begin{cases} E_{ct} = \iint \frac{1}{2} \rho H \langle \vec{v}^2 \rangle dS \\ E_{pt} = \iint \frac{1}{2} \rho g \langle h^2 \rangle dS \\ E_t = E_{ct} + E_{pt} \end{cases}$$

E_t est une quantité constante à l'échelle séculaire.

6.2 - Bilan énergétique

Après résolution numérique des équations de la marée, il est possible de calculer les intégrales (4) pour chaque onde. Les valeurs admises pour M_2 , en tenant compte de l'effet supplémentaire des marées terrestres, sont :

$$E_{ct} = 5,2 \times 10^{17} \text{ J}$$

$$E_{pt} = 2,1 \times 10^{17} \text{ J}$$

$$E_t = 7,3 \times 10^{17} \text{ J}$$

d'après HENDERSHOTT (1972).

La puissance fournie par la force génératrice peut être évaluée de la même façon :

$$W_t = \iint \langle W \rangle dS$$

soit $W_t = 3,5 \pm 0,5 \times 10^{12}$ W pour M_2 seule

et $W_t = 5 \pm 1 \times 10^{12}$ W pour la somme des principales composantes.

L'effet de la marée terrestre est évalué par HENDERSHOTT à 30 % de cette puissance totale.

La puissance totale ainsi obtenue est cohérente avec la valeur déduite du ralentissement séculaire de la rotation de la Terre dû à la marée, estimé à $-8,9 \times 10^{-22}$ radian/seconde².

La dissipation de l'énergie par frottement a lieu surtout dans les mers littorales (Mer de Bering, Mer d'Okhotsk, mers au Nord de l'Australie, mers entourant les îles britanniques ; plateau de Patagonie et baie d'Hudson essentiellement). Elle peut être estimée de deux façons : soit directement en calculant

$$F_t = \iint \langle F \rangle dS$$

où l'intégrale est étendue à la surface des mers littorales, soit en calculant la puissance transmise par les marées océaniques :

$$P_t = \int \rho g H \langle v_n h \rangle ds$$

où l'intégrale est prise le long de la frontière océan-mer littorale et v_n est la composante normale à cette frontière de la vitesse.

Les valeurs estimées pour F_t (JEFFREYS - 1920 ; HEISKANEN - 1921) ou pour P_t (MILLER - 1966) sont de l'ordre de $1,7 \times 10^{12}$ W, soit 50 % environ de la puissance fournie par la force génératrice (pour M_2 seule).

La puissance dissipée par unité de surface reste cependant assez faible : elle est inférieure à 1 W/m^2 . La figure 21 illustre le mécanisme de dissipation de l'énergie sur le plateau continental du Nord-Ouest de l'Europe. L'écart de l'ordre de 10 % entre la puissance dissipée par frottement (195 millions de kW) et l'apport extérieur (215 millions de kW) est un indicateur de la qualité des estimations énergétiques actuelles.

La différence de 50 % entre les valeurs estimées de la puissance fournie aux océans par le potentiel générateur et de la puissance dissipée par frottement ne peut donc pas s'expliquer uniquement par l'imprécision des données numériques disponibles. Il reste à trouver un ou plusieurs autres modes de dissipation des 50 % manquants. Une des possibilités actuellement envisagée est celle de la dissipation par l'intermédiaire des ondes internes, mais aucune explication satisfaisante n'a encore pu être donnée à ce sujet.

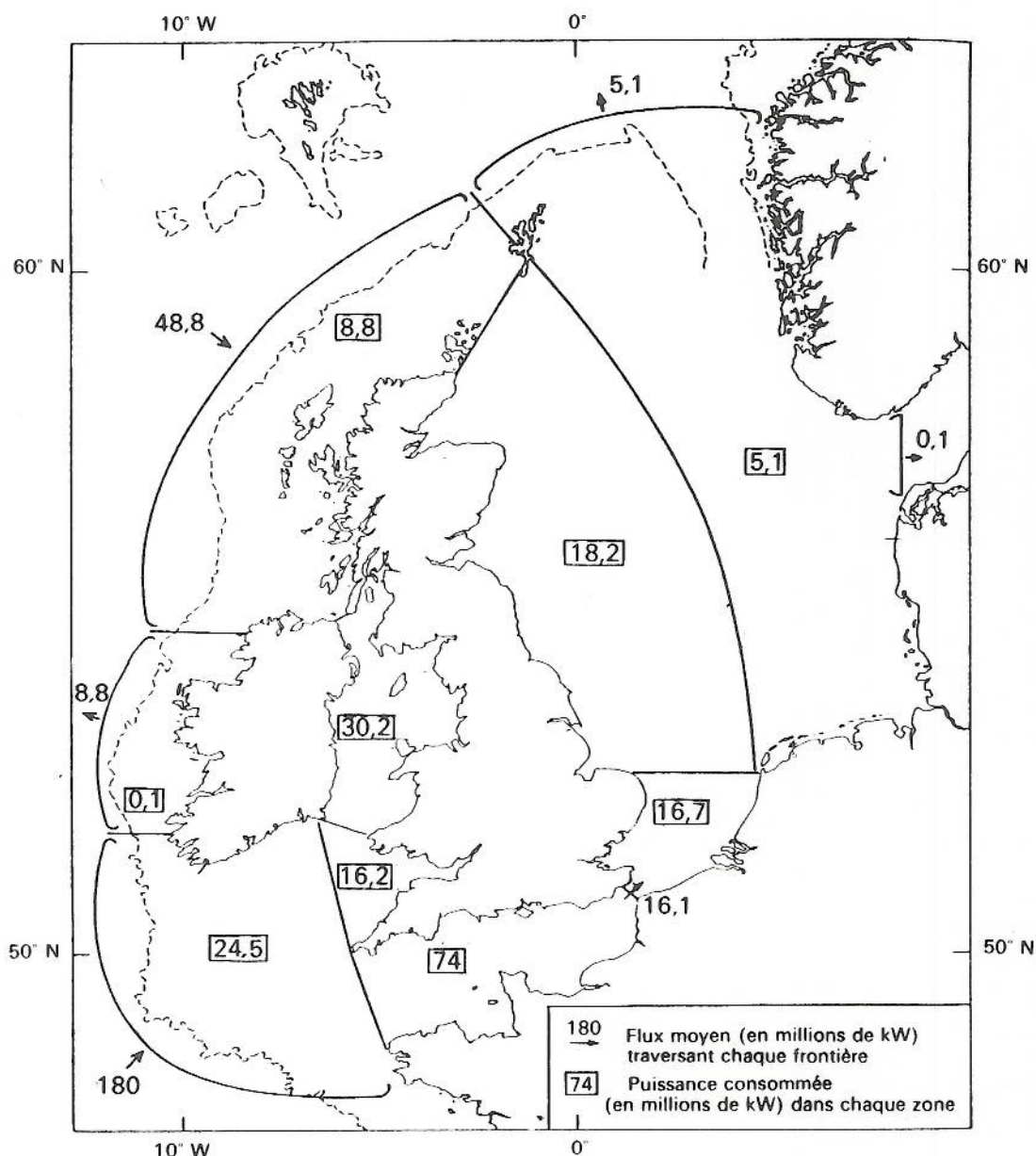


Figure 21 — Estimation du bilan énergétique de la marée sur le plateau continental du Nord-Ouest de l'Europe d'après R.A. FLATHER (1976)

APPENDICE I

Éléments de théorie du signal

1. Séries et transformées de Fourier

1.1. Séries finies

Considérons une fonction complexe $s(t)$ définie pour $0 \leq t < T$ et connue à des instants régulièrement espacés de Δ . Supposons que l'on veuille exprimer cette fonction en somme de fonctions périodiques.

Soit $s_r = s(r\Delta)$ $0 \leq r \leq N-1$ avec $N = \frac{T}{\Delta}$

On cherche des coefficients complexes λ_m tels que :

$$(1) \quad s_r = \sum_{m=-M}^{M-1} \lambda_m e^{2i\pi f_m r \Delta} \quad (i^2 = -1) \quad 0 \leq r \leq N-1$$

On dispose de N équations à $2M$ inconnues et le problème possède une infinité de solutions pourvu qu'on choisisse $2M > N$.

La solution est unique si on suppose que :

- la fonction est périodique et de période T
- aucune composante n'a une période inférieure à 2Δ

Alors $f_m = \frac{m}{T}$, $-\frac{N}{2} \leq m \leq \frac{N}{2} - 1$

(on peut supposer, sans réduire la généralité, que N est pair)

Les fréquences f sont des multiples entiers, ou harmoniques, de la fréquence de base $\frac{1}{T}$ et la fréquence maximale est $f_M = \frac{1}{2\Delta} = \frac{N}{2T}$.

f_M est appelée fréquence de Nyquist.

(1) peut alors s'écrire :

$$s_r = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \lambda_m e^{2i\pi \frac{mr}{N}}$$

C'est un système de N équations à N inconnues que l'on sait résoudre. Il possède toujours une solution unique car toutes les équations sont linéairement indépendantes. Cette solution est la décomposition de la fonction en série de Fourier.

.../...

Pour résoudre le système, nous allons mettre à profit les propriétés d'orthogonalité des exponentielles complexes : on peut vérifier aisément que :

$$\sum_{r=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{kr}{N}} e^{2i\pi \frac{mr}{N}} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k + pN \\ N & \text{si } m = k + pN \end{cases}$$

d'où

$$\sum_{r=0}^{N-1} s_r e^{-2i\pi \frac{kr}{N}} = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \lambda_m \left(\sum_{r=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{kr}{N}} e^{2i\pi \frac{mr}{N}} \right)$$

$$= N \lambda_k \quad \text{pour } -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$$

$\lambda_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} s_r e^{-2i\pi \frac{kr}{N}} \quad (2)$
$s_r = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \lambda_m e^{2i\pi \frac{mr}{N}} \quad (3)$

Dans le cas d'une fonction réelle, on peut remarquer que :

$$\lambda_{-k} = \overline{\lambda_k}$$

soit $s_r = \lambda_0 + \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} \left(\lambda_m e^{2i\pi \frac{mr}{N}} + \overline{\lambda_m} e^{-2i\pi \frac{mr}{N}} \right) + \lambda_{-\frac{N}{2}} e^{-2i\pi \frac{Nr}{2N}}$

Posons $\lambda_m = C_m e^{-i\varphi_m} \quad (C_m \text{ réel})$

$$s_r = C_0 + 2 \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} C_m \cos \left(\frac{2\pi mr}{N} - \varphi_m \right) + C_{N/2} \cos \pi r$$

ou $s_r = A_0 + 2 \sum_{m=1}^{N/2-1} \left(A_m \cos \frac{2\pi mr}{N} + B_m \sin \frac{2\pi mr}{N} \right) + A_{N/2} \cos \pi r$

avec $A_m = C_m \cos \varphi_m = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} s_r \cos 2\pi \frac{mr}{N}$

$$B_m = C_m \sin \varphi_m = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} s_r \sin 2\pi \frac{mr}{N}$$

$$C_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2}$$

$$\varphi_m = \text{Arc tg } \frac{B_m}{A_m}$$

Cas particulier : fréquence pure

$$\text{Soit } s(t) = A e^{2i\pi f t}$$

avec A complexe

f un nombre réel

$$\hat{\lambda}_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} A e^{2i\pi f r \Delta - 2i\pi \frac{k r}{N}}$$

$$\hat{\lambda}_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} A e^{2i\pi \frac{r}{N} (fT - k)}$$

$$\hat{\lambda}_k = A e^{i\pi \frac{N-1}{N} (fT - k)} \frac{\sin \pi (fT - k)}{N \sin \frac{\pi}{N} (fT - k)}$$

$$\text{Posons } h(x) = \left| \frac{\sin \pi (fT - x)}{N \sin \frac{\pi}{N} (fT - x)} \right|$$

$h(x)$ est maximum pour $x = fT + lN$ et s'annule pour $x = fT + m$, m entier différent de lN (fig. 1).

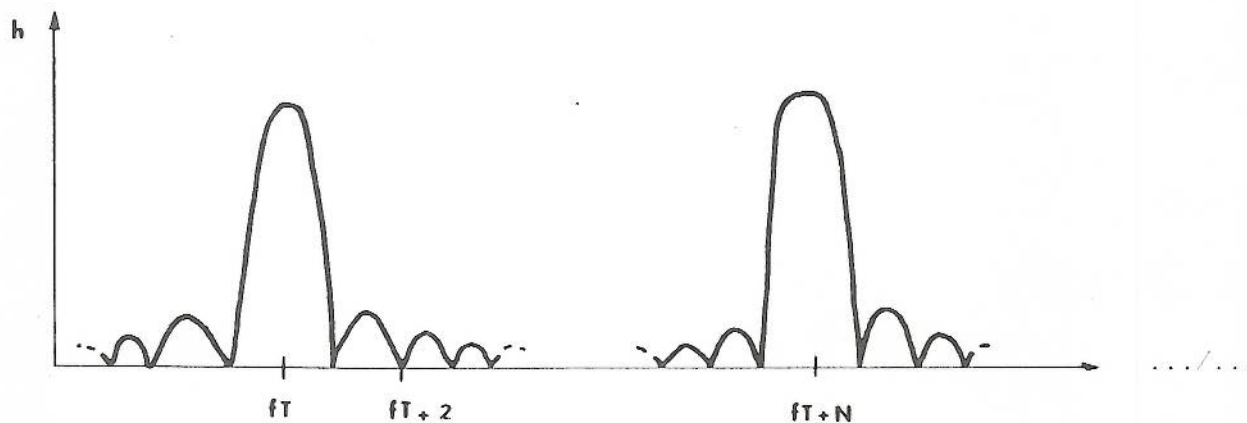


Figure 1

a) f est multiple de $\frac{1}{T}$: $f = \frac{P}{T}$

T est alors une période de s

$$\lambda_k = A \quad \text{pour} \quad k = p + 1 \ N$$

$$\lambda_k = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq p + 1 \ N$$

Réciproquement à partir de la série de Fourier, ($\lambda_p = A$, $\lambda_k = 0$ pour $k \neq p$), f est déterminé à $\frac{N}{T}$ près.

b) f n'est pas un multiple de $\frac{1}{T}$:

T n'est plus une période de s

soit p l'entier tel que $fT - 1/2 \leq p < fT + 1/2$

$$|\lambda_k| \quad \text{est maximum pour} \quad k = p + 1 \ N = n \quad \text{mais} \quad \lambda_n \neq A$$

$$|\lambda_k| \quad \text{ne s'annule pas}$$

Ces résultats se généralisent au cas où s est une somme d'exponentielles complexes :

$$s(t) = \sum_{j=1}^M \lambda_j e^{2i\pi f_j t}$$

La décomposition en série de Fourier peut alors servir à localiser les fréquences f_j . Il faut retenir que :

a) les amplitudes complexes λ_k étant calculées aux fréquences $\frac{k}{T}$ (k entier), cette localisation sera d'autant meilleure que T est grand

b) la décomposition en série de Fourier ne fournit la valeur exacte des amplitudes λ_j que si la durée d'observation T est une période du signal $s(t)$

$$(f_j T \text{ entier} \quad \forall j \quad 1 \leq j \leq M)$$

c) si le signal contient des composantes de fréquences supérieures en valeur absolue à $\frac{N}{2T}$, il sera impossible de les distinguer de celles dont les fréquences sont comprises entre $-\frac{N}{2T}$ et $\frac{N}{2T}$ (aliasing)

Théorème de Parseval

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des exponentielles complexes, on peut montrer que :

$$\frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} |s_r|^2 = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} |\lambda_m|^2$$

La "puissance" moyenne dissipée par s peut être décomposée en contributions de chacun des harmoniques.

1.2. Série de Fourier infinie

Supposons toujours s périodique et soit T sa période. Si s contient tous les harmoniques de $1/T$, on devine, intuitivement, qu'il faut faire tendre le pas d'échantillonnage Δ vers 0 pour pouvoir déterminer les coefficients de la série de Fourier infinie.

$$\text{Soit : } s(t) = \sum_{m=-n}^{n-1} \lambda_m e^{2i\pi \frac{mt}{T}}$$

$$\text{ou : } s(r\Delta) = s_r = \sum_{m=-n}^{n-1} \lambda_m e^{2i\pi \frac{mr}{N}}$$

$$\text{avec : } N = 2n ; \quad T = N\Delta$$

$$\begin{aligned} \text{alors : } \lambda_m &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} s_r e^{-2i\pi \frac{mr}{N}} \\ &= \frac{1}{N\Delta} \sum_{r=0}^{N-1} s_r e^{-2i\pi \frac{mr\Delta}{N\Delta}} \Delta \end{aligned}$$

En faisant tendre Δ vers 0, N vers l'infini avec T constant, on obtient

$$\lambda_m = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-2i\pi \frac{mt}{T}} dt$$

λ_m est le coefficient du développement en série de Fourier de $s(t)$ à la fréquence $\frac{m}{T}$.

$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lambda_m e^{2i\pi \frac{mt}{T}}$
$\lambda_m = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-2i\pi \frac{mt}{T}} dt$

1.3. Transformée de Fourier

Si nous supposons maintenant que notre signal n'est plus périodique, nous voyons que la représentation précédente n'est pas parfaitement adéquate. On comprend qu'un signal quelconque aura des "composantes" à toutes les fréquences. La notion de série de Fourier peut être étendue au cas des signaux apériodiques de la manière suivante, sans chercher la rigueur mathématique :

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{m=-n}^{n-1} \lambda_m e^{2i\pi \frac{mt}{T}} \\ &= \sum_{m=-n}^{n-1} T \lambda_m e^{2i\pi \frac{mt}{T}} \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Cette somme est une approximation de l'intégrale

$$\int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}} S(\nu) e^{2i\pi \nu t} d\nu$$

avec $\nu = \frac{m}{T}$, $d\nu = \frac{1}{T}$, $T \lambda_m = S\left(\frac{m}{T}\right)$

En faisant tendre T vers l'infini, Δ restant constant, on obtient :

$$s(t) = \int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}} S(\nu) e^{2i\pi \nu t} d\nu$$

En faisant tendre Δ vers 0, il vient :

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{2i\pi \nu t} d\nu \\ T \lambda_m &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} s(t) e^{-2i\pi \frac{m}{T} t} dt \end{aligned}$$

En faisant tendre T vers l'infini, on obtient :

$$\begin{aligned} S(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2i\pi \nu t} dt \\ s(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{2i\pi \nu t} d\nu \end{aligned}$$

$S(\nu)$ est la transformée de Fourier de $s(t)$. On utilise également les notations :

$$S(\nu) = F[s(t)] = \widehat{s}(\nu)$$

Propriétés de la transformation de Fourier

- linéarité :

$$F [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda \hat{f}(v) + \mu \hat{g}(v)$$

$$F [\overline{f(t)}] = \overline{\hat{f}(-v)}$$

- changement de signe :

$$F [f(-t)] = \hat{f}(-v)$$

- changement d'échelle :

$$F [f(at)] = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{v}{a}\right)$$

- changement d'origine :

$$F [f(t-a)] = e^{-2i\pi va} \hat{f}(v)$$

- retard ou transposition :

$$F [e^{2i\pi v_0 t} f(t)] = \hat{f}(v - v_0)$$

- dérivation :

$$F [f^{(m)}(t)] = (2i\pi v)^m \hat{f}(v)$$

$$F [(-2i\pi t)^m f(t)] = \hat{f}^{(m)}(v)$$

- convolution :

$$F [f \otimes g] = \hat{f}(v) \cdot \hat{g}(v)$$

- théorème de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(v)|^2 dv$$

- transformée d'une fonction constante : distribution de Dirac

$$F(1) = \delta(v) \begin{cases} = 0 & \text{si } v \neq 0 \\ = \infty & \text{si } v = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

On en déduit, par le théorème du retard que :

$$F \left[e^{2i\pi v_0 t} \right] = \delta(v - v_0)$$

2. Systèmes linéaires et convolution

Lorsque l'entrée et la sortie d'un système linéaire et continu sont fonctions d'une variable (par exemple le temps t), celui-ci peut être caractérisé par une fonction $h(t, t')$ telle que :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t') h(t, t') dt'$$

Si de plus le système est invariant au temps, alors h ne dépend que de $(t - t')$ et :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t') h(t - t') dt'$$



Cette relation de convolution se note encore

$$s = h \otimes e \quad (= e \otimes h)$$

On en déduit

$$\hat{s}(\nu) = \hat{h}(\nu) \cdot \hat{e}(\nu)$$

ce qui montre l'intérêt d'introduire les transformées de Fourier.

La fonction $\hat{h}(\nu)$ est appelée fonction de transfert du système

$|\hat{h}(\nu)|$ est le gain du système à la fréquence ν

$\text{Arg}[\hat{h}(\nu)]$ est le déphasage entre la sortie et l'entrée à la fréquence ν

2.1. Propriétés des produits de convolution

$$\delta \otimes f = f$$

$$\delta_{t-a} \otimes f = f(t-a)$$

$$\delta^{(m)} \otimes f = f^{(m)}$$

En particulier si $e(t) = \delta(t)$

$$s(t) = h(t) \otimes e(t) = h(t)$$

$h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système, ou réponse à l'impulsion unité.

.../...

2.2. Applications

2.2.1. Echantillonnage

La fonction échantillonnée $F(t)$ peut être assimilée à une somme d'impulsions d'amplitude $f(n\Delta)$ centrées en $n\Delta$:

$$F(t) = f(t) \theta(t)$$

$$\text{avec } \theta(t) = \Delta \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta) \quad (\text{fonction peigne})$$

$$\text{or } \hat{\theta}(\nu) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{\Delta}\right)$$

On en déduit que :

$$\hat{F}(\nu) = \hat{\theta}(\nu) \otimes \hat{f}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\delta\left(\nu - \frac{n}{\Delta}\right) \otimes \hat{f}(\nu) \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\nu - \frac{n}{\Delta}\right)$$

$\hat{F}(\nu)$ est une distribution périodique de période $\frac{1}{\Delta}$, formée d'une somme de distributions identiques à $\hat{f}(\nu)$ et décalées de $\frac{n}{\Delta}$.

Si f est réel, alors $\hat{f}(\nu)$ est hermitienne ($\overline{\hat{f}(\nu)} = \hat{f}(-\nu)$) et le support de $\hat{f}(\nu)$ (ensemble des points tels que $|\hat{f}(\nu)| \neq 0$) est symétrique. Soit ν_0 et $-\nu_0$ ses bornes ($\nu_0 > 0$)

a) si $\frac{1}{2\Delta} > \nu_0$, les supports des $\hat{f}\left(\nu - \frac{n}{\Delta}\right)$ sont disjoints et on peut déduire $\hat{f}(\nu)$ de $\hat{F}(\nu)$, donc reconstituer entièrement $f(t)$ (Fig. 2).

b) si $\frac{1}{2\Delta} < \nu_0$, la connaissance de $\hat{F}(\nu)$ ne permet plus de reconstituer $f(t)$ (Fig. 3) (aliasing)

ν_0 est la fréquence de Nyquist, ou fréquence de coupure. $\Delta = \frac{1}{2\nu_0}$ est la période de Nyquist. On pourra comparer avec les résultats du § 1.1.

2.2.2. Signal de longueur finie

Il est physiquement impossible d'observer le signal pendant un temps infini. Le résultat de l'observation pendant une période finie $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ est obtenu en multipliant $f(t)$ par une fonction porte $P(t)$

$$\begin{cases} P(t) = \frac{1}{T} & |t| \leq \frac{T}{2} \\ P(t) = 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$F(t) = f(t) P(t)$$

$$\hat{F}(\nu) = \hat{f}(\nu) \otimes \hat{P}(\nu)$$

$$\text{avec } \hat{P}(\nu) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2i\pi\nu t} dt = \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T} \quad (\text{fig. 4})$$

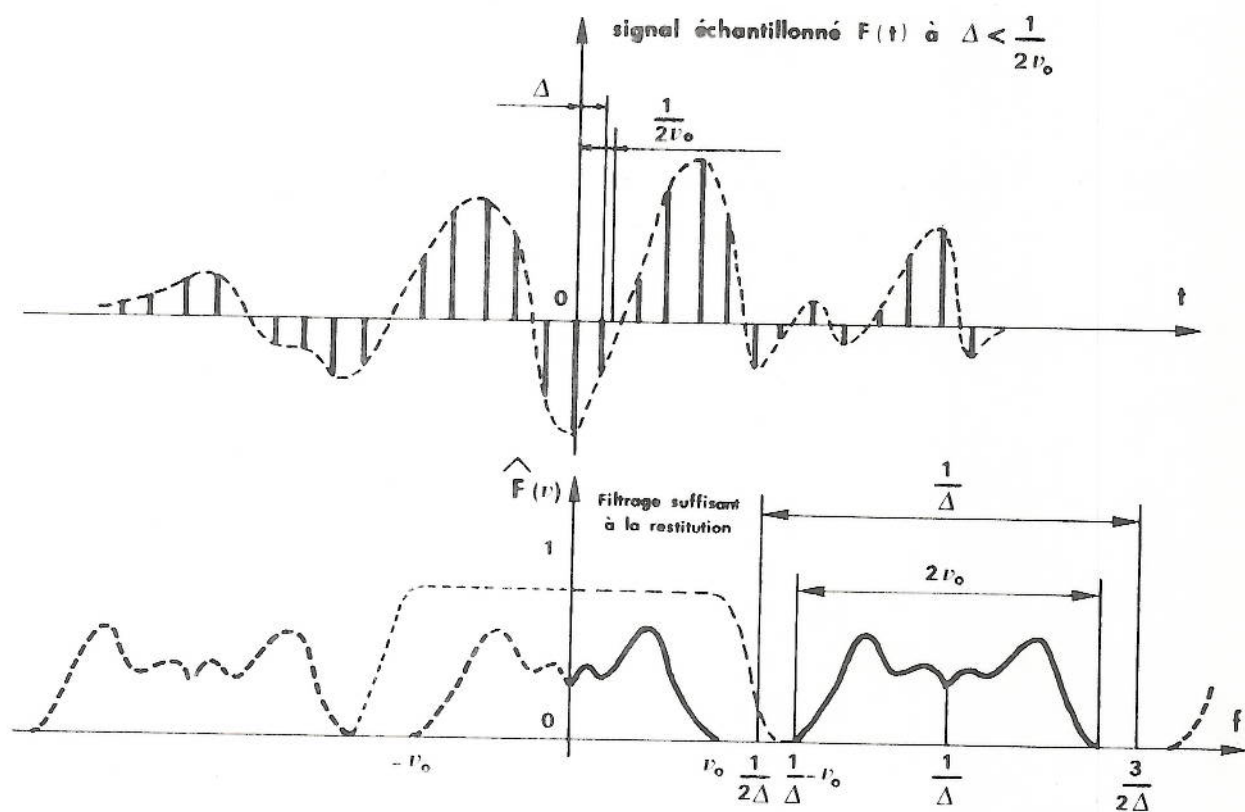


Fig. 2 - Échantillonnage plus serré que la période de Nyquist

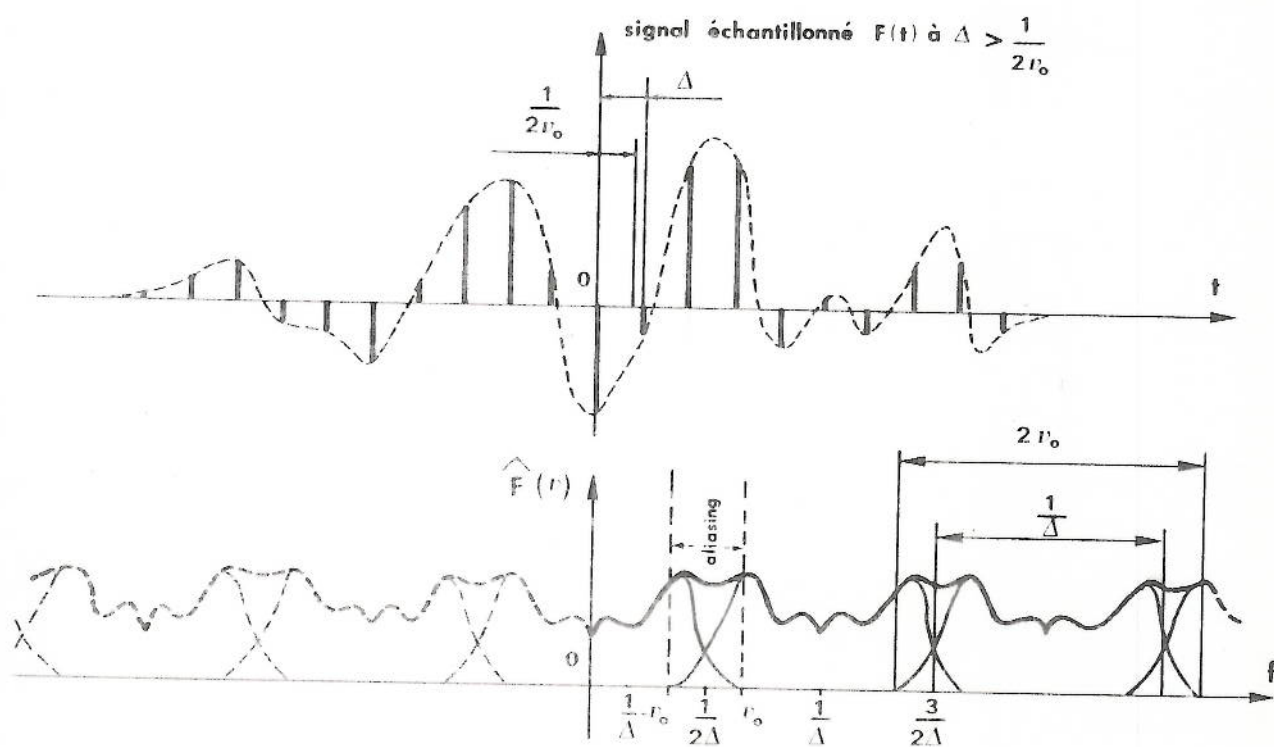
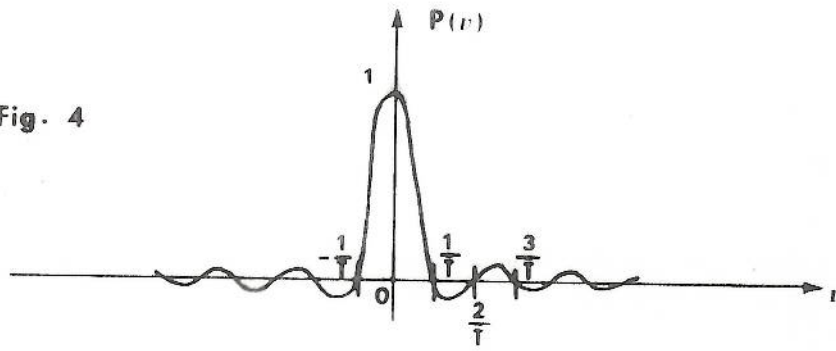


Fig. 3 - Échantillonnage trop lâche.

Fig. 4



a) $f(t)$ est périodique et admet T comme période.

Alors $\hat{f}(v)$ est une somme de distributions de Dirac centrées en $\frac{m}{T}$ de poids λ_m :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lambda_m e^{+2i\pi \frac{m}{T} t} \\ \hat{f}(v) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lambda_m \mathcal{F}\left(e^{2i\pi \frac{m}{T} t}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lambda_m \delta\left(v - \frac{m}{T}\right) \\ \hat{F}(v) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lambda_m \hat{P}\left(v - \frac{m}{T}\right) \end{aligned}$$

d'où $\hat{F}\left(\frac{m}{T}\right) = \lambda_m$

b) $f(t)$ est périodique mais n'admet pas T comme période.

Alors les fréquences $\frac{m}{T}$, ne correspondent plus aux zéros de $\hat{P}(v)$ et la transformée de Fourier de $F(t)$ ne donne plus les valeurs exactes des poids λ_m des différents harmoniques puisque $\hat{P}\left(\frac{n}{T'} - \frac{m}{T}\right) \neq 0$ et de 1 pour $T' \neq T$.

On retrouve là encore des résultats semblables à ceux énoncés au § 1.1 pour les séries de Fourier.

c) critère de séparation

On peut négliger $\hat{P}(v)$ devant 1 pour

$$|v| > \frac{1}{T}$$

donc

$$\hat{F}(v) \approx \int_{-1/T}^{1/T} \hat{P}(\mu) \hat{f}(v - \mu) d\mu$$

$\hat{F}(v)$ contient des contributions de $\hat{f}$ aux fréquences comprises entre $v - \frac{1}{T}$ et $v + \frac{1}{T}$. On ne peut donc pratiquement séparer, à partir d'une durée T d'observation, deux fréquences v_1 et v_2 que si elles vérifient le critère suivant :

$$|v_1 - v_2| > \frac{1}{T}$$

Ce critère est appelé critère de Rayleigh

3. Notions de probabilités

3.1. Définitions

Expérience aléatoire : c'est une expérience dont le résultat est soumis au hasard (ex : jeu de pile ou face). Une telle expérience peut se décrire mathématiquement par la donnée de l'ensemble Ω des résultats ω possibles de cette expérience.

événement aléatoire : c'est un événement lié à une expérience aléatoire (ex : faire un total de 10 en jetant deux dés). Il est représenté par l'ensemble des résultats ω de l'expérience qui le réalisent. C'est un élément d'un ensemble $\mathfrak{a}$ de parties de Ω .

loi empirique des grands nombres : si on observe la fréquence de réalisation d'un événement A au cours d'une longue suite de N répétitions de l'expérience à laquelle il est lié, on constate empiriquement que cette fréquence N_A/N fluctue de moins en moins lorsque le nombre N devient grand.

espace de probabilité : la loi empirique des grands nombres conduit à une notion intuitive de probabilité :

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$$

avec $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ et $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathfrak{a}$

Le triplet $(\Omega, \mathfrak{a}, P)$ constitue un espace de probabilité.

variable aléatoire : c'est une application X de Ω dans $\mathbb{R}^d$ telle que pour toute partie B de $\mathbb{R}^d$:

$$\left\{ \omega \mid X(\omega) \in B \right\} \in \mathfrak{a}$$

(on dit que X est "mesurable"). On peut alors définir la loi de probabilité de X par :

$$P_X(B) = P \left\{ \omega \mid X(\omega) \in B \right\} \quad (B \in \mathbb{R}^d)$$

On dit que X admet une densité de probabilité f

$$\text{si } P_X(B) = \int_B f(x) dx$$

$$\text{avec } P_X(\mathbb{R}^d) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = 1$$

$$\text{et } f(x) \geq 0$$

Dans la suite nous considérerons des variables aléatoires réelles ($d = 1$) (v.a.r.).

.../...

3.2. Moments des variables aléatoires réelles

On appelle moment d'ordre m la quantité

$$E(X^m) = \int_{\mathbb{R}} x^m f(x) dx$$

espérance mathématique : c'est la "moyenne" des valeurs de X

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \bar{x}$$

variance : c'est la moyenne des fluctuations de X autour de $E(X)$

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_{\mathbb{R}} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sigma^2$$

σ est appelé écart quadratique moyen.

3.3. Variables aléatoires liées

Soient deux v.a.r. X et Y . On peut considérer le couple (X, Y) comme une variable aléatoire, application de Ω sur $\mathbb{R}^2$.

On peut définir la densité de probabilité f_{XY} par :

$$f_{XY}(x, y) dx dy = P[x < X < x + dx \text{ et } y < Y < y + dy]$$

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y) = f_Y(y) f_{X|Y}(x)$$

en notant $f_{Y|X}$ la densité de probabilité conditionnelle de Y lorsque X est donné.

On dit que X et Y sont indépendantes si

$$f_{Y|X}(y) = f_Y(y) \text{ et } f_{X|Y}(x) = f_X(x)$$

$$\text{alors } f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Pour définir le degré de dépendance de X et Y , il est commode d'introduire la covariance :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \bar{x})(Y - \bar{y})] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})(y - \bar{y}) f_{XY}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

si X et Y sont indépendantes, on peut séparer les variables dans l'intégrale et il vient

$\text{Cov}(X, Y) = 0$ (la réciproque n'est pas vraie dans le cas général).

$$\text{si } X = Y, \text{ alors } f_{Y|X} = f_{X|Y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases} \dots / \dots$$

$$\text{d'où } \text{Cov}(X, X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f_X(x) dx$$

$$\text{soit } \text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$$

On définit un coefficient de corrélation ρ_{XY} tel que

$$\begin{cases} \rho_{XY} = 0 & \text{si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \rho_{XY} = 1 & \text{si } X = Y \end{cases}$$

$$\text{par la relation : } \rho_{XY}^2 = \frac{\text{Cov}^2(X, Y)}{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}$$

$$\text{On peut démontrer que } \rho_{XY}^2 \leq 1$$

3.4. Exemples de lois de probabilité

Loi normale ou gaussienne

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ E(X) &= \mu \\ \text{Var}(X) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Loi du χ^2

soit n v.a. réelles normales indépendantes, d'espérance nulle et de variance unité, $X_1, \dots, X_n$.

$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$ est une v.a.r. qui suit une loi de probabilité de densité :

$$f(y) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \quad (\Gamma \text{ fonction d'Euler})$$

Cette loi est appelée loi du χ^2 à n degrés de liberté.

$$E(Y_n) = n$$

$$\text{Var}(Y_n) = 2n$$

$$\text{Soit } Y_n = \sum_{i=1}^m Y_{ni}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que les Y_{ni} soient indépendants est que $n = \sum_{i=1}^m n_i$

4. Estimation statistique

4.1. Principe

Une expérience aléatoire se décrit mathématiquement par la donnée d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Mais, très souvent dans les applications, la probabilité P n'est pas connue exactement. On pourra cependant définir a priori un "modèle statistique", à l'aide d'une famille paramétrée de probabilités P_θ sur $(\Omega, \mathcal{A})$, la valeur exacte de θ étant inconnue. (Exemple : θ est l'écart type d'une loi gaussienne centrée).

Le problème de l'estimation statistique est d'approcher "au mieux", à partir du résultat ω de l'expérience aléatoire Ω , la valeur $f(\theta)$ d'une fonction f donnée du paramètre inconnu θ . Toute variable aléatoire X définie sur Ω peut donc être considérée comme un "estimateur" ou une "statistique".

4.2. Choix de l'estimateur

4.2.1. Biais

On appelle biais B de l'estimateur X de la fonction f la quantité :

$$B(\theta) = E_\theta(X) - f(\theta) = \int_{\Omega} X dP_\theta - f(\theta)$$

L'estimateur est dit sans biais lorsque $B(\theta) \equiv 0$

4.2.2. Risque quadratique

Le risque quadratique $R(\theta)$ d'un estimateur X de "carré intégrable" ($E_\theta(X^2) < +\infty$) est la quantité :

$$R(\theta) = E_\theta \left\{ (X - f(\theta))^2 \right\} = E_\theta \left\{ (X + B(\theta) - E_\theta(X))^2 \right\}$$
$$R(\theta) = \text{Var}_\theta X + B(\theta)^2$$

4.2.3. Critère de choix

L'estimateur "idéal" est celui pour lequel :

$$B(\theta) = 0 \quad \forall \theta \quad \text{(estimateur sans biais)}$$

$$\text{Var}_\theta(X) \text{ minimum } \forall \theta \quad \text{(estimateur de variance minimum)}$$

Ces deux conditions sont en général incompatibles et il faut adopter un compromis entre les deux. On cherchera par exemple, parmi tous les estimateurs possibles, celui pour lequel $R_x(\theta)$ est minimum pour tout θ (estimateur de risque minimum).

4.3. Exemple : variance empirique d'une loi gaussienne

Soit X_i ($i = 1 \dots n$) n variables aléatoires gaussiennes indépendantes d'espérance μ et d'écart type σ .

Les $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ sont des variables aléatoires gaussiennes centrées d'écart type 1 et indépendantes.

$$\text{donc } E(Y_i Y_j) = 0 \quad i \neq j$$

$$E(Y_i^2) = 1$$

et $Z = \sum_{i=1}^n Y_i^2$ suit une loi du χ^2 à n degrés de liberté

$$\text{Posons } \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$$

$\bar{Y}$ et les $Y_i - \bar{Y}$ sont des v.a. gaussiennes centrées (ce sont des combinaisons linéaires de v.a. gaussiennes et centrées).

$$\begin{aligned} \text{Or } E\left\{\bar{Y}(Y_i - \bar{Y})\right\} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E(Y_j Y_i) - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n E(Y_j Y_k) \\ &= \frac{1}{n} E(Y_i^2) - \frac{1}{n} E(Y_i^2) = 0 \end{aligned}$$

donc $\bar{Y}$ et $(Y_i - \bar{Y})$ sont indépendants.

On peut écrire :

$$Z = n\bar{Y}^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

où Z est une v.a. qui suit une loi du χ^2 à n degrés de liberté

$A = n\bar{Y}^2$ est une v.a. qui suit une loi du χ^2 à 1 degré de liberté (carré d'une v.a. gaussienne)

$B = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ est une v.a. qui suit une loi du χ^2 à p degrés de liberté (somme de carrés de v.a. gaussiennes non indépendantes)

Les $\bar{Y}$ et les $(Y_i - \bar{Y})$ étant indépendants, on démontre (nous l'admettrons) que A et B sont indépendants. En appliquant le résultat du § 3.4., on déduit de la relation

$$Z = A + B$$

$$\text{que } n = 1 + p$$

$$\text{d'où } p = n - 1$$

La v.a. $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ suit une loi de χ^2 à $n-1$ degrés de liberté.

.../...

donc $E \left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \right] = n-1$

Posons $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})$

$$E(S^2) = \sigma^2$$

S^2 est un estimateur sans biais de σ^2

intervalles de confiance :

$s^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ est une v.a. suivant une loi de χ^2 à $n-1$ degrés de liberté. Connaissant la densité de probabilité $f_{\chi_{n-1}^2}$ de s^2 , on peut déterminer des intervalles $\left[x_{n-1}(\frac{\alpha}{2}) , x_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \right]$ tels que

$$P \left\{ x_{n-1}(\frac{\alpha}{2}) \leq s^2 \leq x_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2}) \right\} = \int_{x_{n-1}(\frac{\alpha}{2})}^{x_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})} f_{\chi_{n-1}^2}(x) dx = 1-\alpha$$

Un tel intervalle est appelé intervalle de confiance à $1-\alpha$ ($1-\alpha$ étant exprimé en général en %). L'abaque de la figure n° 5 donne ces bornes en fonction de $p = n-1$ pour trois valeurs de α (0,20 ; 0,05 ; 0,01).

4.4. Estimation par les moindres carrés

Supposons que la sortie Y d'un système puisse être prédite à partir de k entrées X_j ($j = 1 \dots k$) par une relation linéaire

$$Y = \sum_{j=1}^k \theta_j X_j$$

où les coefficients θ_j sont des inconnues à estimer à partir de N mesures simultanées des entrées et de la sortie. Mais, pratiquement, on ne peut déterminer Y qu'à une erreur Z près due aux erreurs de mesure ou aux inadéquations du modèle.

Le modèle peut être représenté par N équations du type :

$$Y_n = \sum_{j=1}^k \theta_j X_{jn} + Z_n$$

avec Y_n : v.a. correspondant à la sortie mesurée au cours de l'expérience n

X_{jn} : valeur de X_j dans la n ème expérience

Z_n : v.a. représentant le terme d'erreur.

L'estimateur par les moindres carrés est celui qui minimise la forme quadratique $Z^T V^{-1} Z$ avec :

.../...

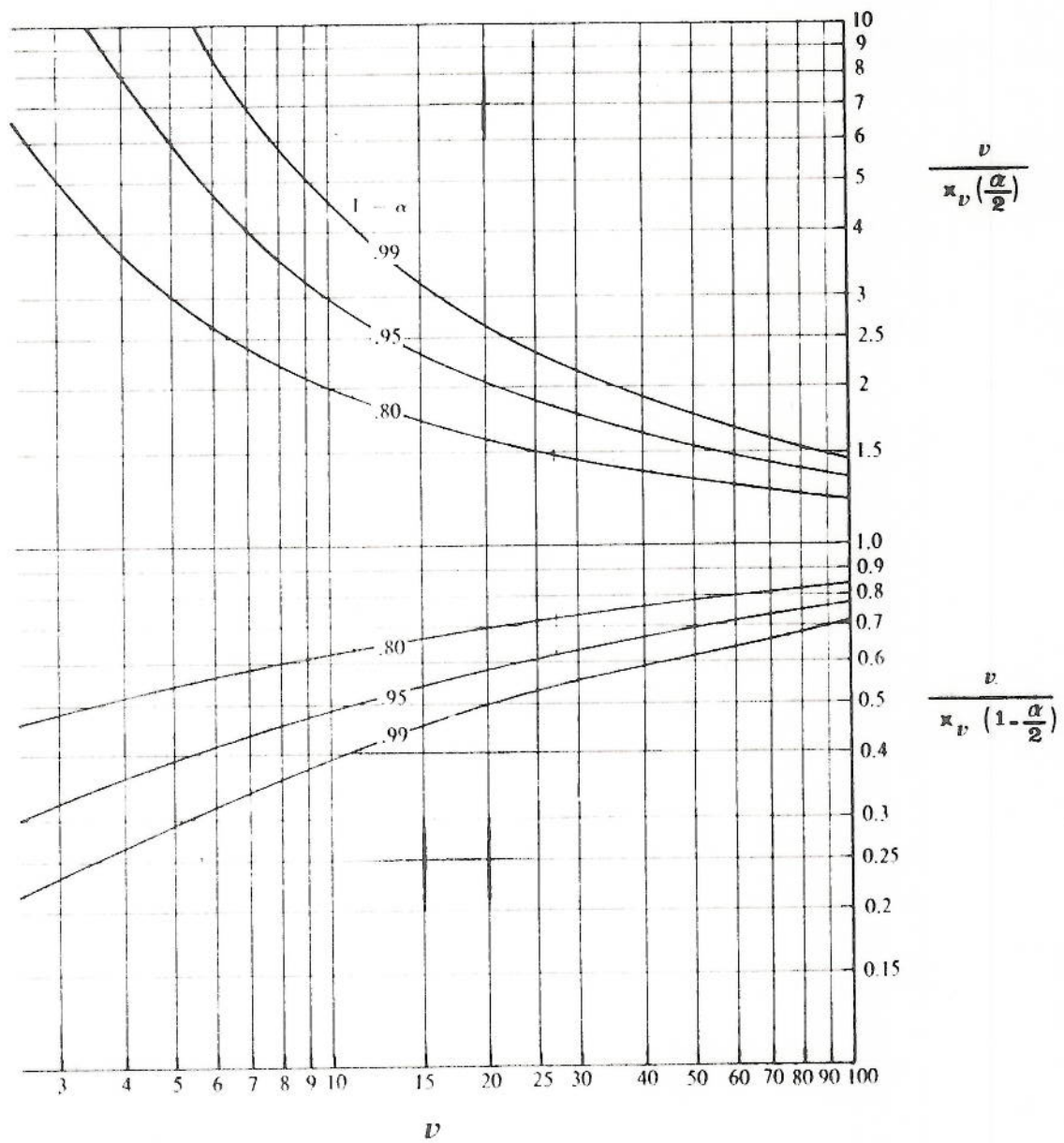


Figure n° 5

$$Z^T = [Z_1 \dots Z_N]$$

$$V = \begin{bmatrix} \text{Cov}(Z_1, Z_1) & \dots & \text{Cov}(Z_1, Z_N) \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}(Z_N, Z_1) & \dots & \text{Cov}(Z_N, Z_N) \end{bmatrix}$$

Posons $X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{k1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1N} & \dots & x_{kN} \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$, $\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix}$.

La solution cherchée minimise :

$$Z^T V^{-1} Z = (Y - X\Theta)^T V^{-1} (Y - X\Theta)$$

En dérivant par rapport à Θ , on obtient :

$$-d\Theta^T X^T V^{-1} (Y - X\Theta) - (Y - X\Theta)^T V^{-1} X d\Theta = 0$$

V^{-1} étant symétrique, comme V , il reste :

$$\boxed{X^T V^{-1} X \Theta = X^T V^{-1} Y}$$

c'est-à-dire un système de k équations à k inconnues θ_j : les équations normales.

Remarque : variables complexes

Dans le cas de variables complexes, on cherche à minimiser la quantité réelle :

$$Z^* V^{-1} Z$$

où $*$ indique l'adjoint (transposé et conjugué)

et V est une matrice réelle.

Les équations normales s'écrivent alors :

$$X^* V^{-1} X \Theta = X^* V^{-1} Y$$

.../...

5. Processus stochastiques

5.1. Définitions

Un signal composé apparemment de "bruit" peut être représenté, à un instant donné, par une variable aléatoire. Pour décrire le signal, il faut donc une suite infinie de v.a. que l'on notera X_t , t variant de $-\infty$ à $+\infty$, et qui constitue un processus stochastique. Ce processus est dit discret ou continu selon que t varie de manière discrète ou continue.

Si les v.a. X_t sont identiques pour tout t , on dit que le processus est stationnaire. Il est nécessaire que les densités de probabilité des X_t soient indépendantes du temps ; en particulier, espérance et variance sont indépendantes du temps.

Un exemple bien connu de processus non stationnaire est la "marche au hasard" :

$$X_1 = Z_1$$

$$X_2 = Z_1 + Z_2$$

$$\vdots$$

$$X_n = Z_1 + \dots + Z_n$$

Où les Z_i sont des v.a. indépendantes d'espérance μ et de variance σ^2

$$\text{alors : } E(X_n) = n \mu$$

$$\text{Var}(X_n) = n \sigma^2$$

En pratique, il n'est pas possible d'observer un phénomène pendant une durée infinie : la propriété de stationnarité dépend en fait de l'échelle de temps que l'on considère.

5.2. Caractéristiques temporelles

5.2.1. Définitions

Soit X_t et Y_t deux processus réels. On définit les grandeurs suivantes :

$$\text{- intercovariance : } \quad \rho_{XY}^{(1)}(t, t+u) = E(X_t, Y_{t+u})$$

$$\begin{aligned} \text{- intercovariance centrée : } \quad \rho_{XY}^{(2)}(t, t+u) &= \text{Cov}(X_t, Y_{t+u}) \\ &= \rho_{XY}^{(1)}(t, t+u) - E(X_t)E(Y_{t+u}) \end{aligned}$$

$$\text{- intercorrélation : } \quad \rho_{XY}(t, t+u) = \frac{\rho_{XY}^{(2)}(t, t+u)}{\sqrt{\text{Var}(X_t) \text{Var}(Y_{t+u})}}$$

.../...

Lorsque $X_t = Y_t$, on parle de, respectivement :

- autocovariance : $\gamma_{XX}^{(1)}$
- autocovariance centrée : $\gamma_{XX}^{(2)}$
- autocorrélation : ρ_{XX}

Remarque : ces définitions peuvent être étendues à des processus complexes en posant :

$$\begin{aligned}\gamma_{XY}^{(1)}(t, t+u) &= E(X_t, Y_{t+u}^*) \\ \gamma_{XY}^{(2)}(t, t+u) &= \text{Cov}(X_t, Y_{t+u}^*)\end{aligned}$$

où on note avec un astérisque le complexe conjugué.

Le module de ρ_{XY} s'appelle alors la cohérence des deux processus.

Dans le cas de processus stationnaires $\gamma_{XY}^{(1)}$, $\gamma_{XY}^{(2)}$ et ρ_{XY} sont indépendants de t et on peut écrire :

$$\begin{aligned}\gamma_{XY}^{(1)}(u) &= E(X_t, Y_{t+u}) \\ \gamma_{XY}^{(2)}(u) &= \text{Cov}(X_t, Y_{t+u}) \\ \rho_{XY}(u) &= \frac{\gamma_{XY}^{(2)}(u)}{\sqrt{\text{Var}(X_t) \text{Var}(Y_{t+u})}}\end{aligned}$$

Nous supposons, dans la suite, que les processus sont stationnaires.

5.2.2. Propriétés

$$\begin{aligned}\gamma_{XY}^{(1)}(u) &= \gamma_{YX}^{(1)}(-u) \\ \gamma_{XY}^{(2)}(u) &= \gamma_{YX}^{(2)}(-u) \\ \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \gamma_{XY}^{(2)}(u) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\rho_{XY}(u)| &\leq 1 \\ \rho_{XX}(0) &= 1\end{aligned}$$

5.2.3. Estimation

On peut chercher à estimer l'intercovariance à partir de l'observation des processus X_t et Y_t pendant une durée T . Deux estimateurs peuvent être construits intuitivement :

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{XY}^{(1)}(u) &= \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^{T-u} X_t Y_{t+u} dt & , \quad 0 \leq u \leq T \\ 0 & , \quad u > T \end{cases} \\ \hat{\gamma}_{XY}^{(1)'}(u) &= \begin{cases} \frac{1}{T-u} \int_0^{T-u} X_t Y_{t+u} dt & , \quad 0 \leq u \leq T \\ 0 & , \quad u > T \end{cases}\end{aligned}$$

.../...

$$\text{et } \begin{aligned} \hat{p}_{xy}^{(1)}(-u) &= \hat{p}_{xy}^{(1)}(u) \\ \hat{p}_{xy}^{(1)'}(-u) &= \hat{p}_{xy}^{(1)'}(u) \end{aligned}$$

Les estimateurs de $p_{xy}^{(2)}$ sont obtenus en remplaçant X_t et Y_{t+u} par $X_t - \bar{X}$ et $Y_{t+u} - \bar{Y}$ où

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \int_0^T X_t dt$$

a) biais

$$E \left[\hat{p}_{xy}^{(1)}(u) \right] = \begin{cases} 0 & u > T \\ \frac{1}{T} \int_0^{T-u} E(X_t Y_{t+u}) dt & 0 \leq u \leq T \end{cases}$$

soit

$$E \left[\hat{p}_{xy}^{(1)}(u) \right] = \begin{cases} p_{xy}^{(1)}(u) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) & , 0 \leq |u| \leq T \\ 0 & , |u| > T \end{cases}$$

de même

$$E \left[\hat{p}_{xy}^{(1)'}(u) \right] = \begin{cases} p_{xy}^{(1)'}(u) & , 0 \leq |u| \leq T \\ 0 & , |u| > T \end{cases}$$

L'estimateur $\hat{p}_{xy}^{(1)}$ est sans biais, alors que l'estimateur $\hat{p}_{xy}^{(1)'}$ est seulement asymptotiquement sans biais :

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} B \left[\hat{p}_{xy}^{(1)} \right] = T \lim_{T \rightarrow \pm\infty} -\frac{|u|}{T} p_{xy}^{(1)}(u) = 0$$

b) risque quadratique

$$R \left[\hat{p}_{xy}^{(1)} \right] = \text{Var} \left[\hat{p}_{xy}^{(1)} \right] + B^2 \left[\hat{p}_{xy}^{(1)} \right] \quad (\text{cf } \S 4.2.2)$$

$$R \left[\hat{p}_{xy}^{(1)'} \right] = \text{Var} \left[\hat{p}_{xy}^{(1)'} \right]$$

La variance des estimateurs ne peut pas être calculée dans le cas général. La figure n° 6 représente $R \left[\hat{p}_{xx}^{(1)} \right]$ et $R \left[\hat{p}_{xx}^{(1)'} \right]$

dans le cas particulier où

$$p_{xx}^{(1)}(u) = \sigma^2 e^{-\lambda |u|}$$

.../...

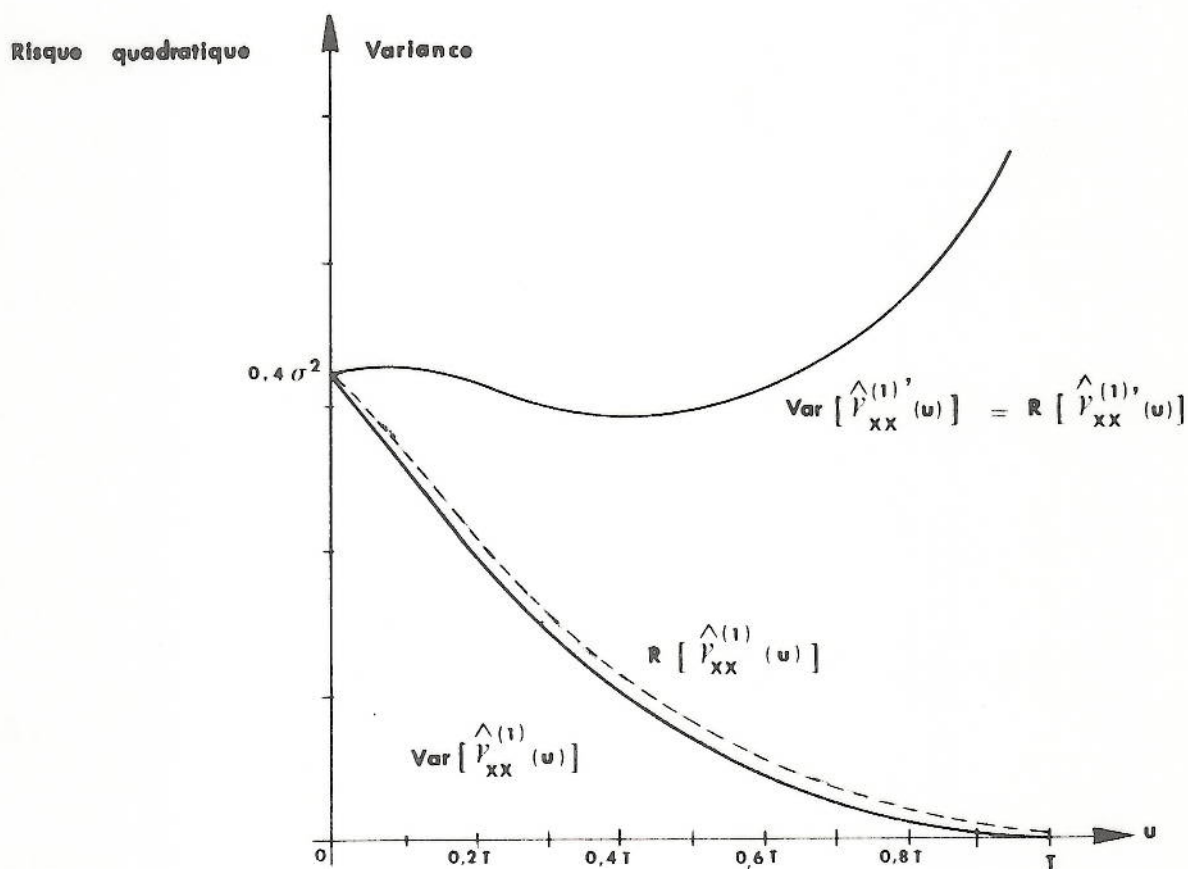


Figure n° 6

Ce comportement semble général : l'estimateur $\hat{p}_{XY}^{(1)}$ est préférable, au sens du risque, à l'estimateur $\hat{p}_{XY}^{(1)}$.

Il faut cependant garder présent à l'esprit que les formules d'estimation ne sont valables que pour $|u|$ petit devant T , puisque les valeurs estimées tendent vers 0 lorsque $|u|$ tend vers T .

c) Formules d'estimation discrètes

Dans le cas de processus échantillonnés avec un pas Δ , on utilisera des formules du type :

$$\hat{p}_{XY}^{(2)}(k\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-k} (x_{m\Delta} - \bar{x})(y_{(m+k)\Delta} - \bar{y}) & , k < N \\ 0 & , k \geq N \end{cases}$$

ou

$$\hat{p}_{XY}^{(2)}(k\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{N-k} \sum_{m=1}^{N-k} (x_{m\Delta} - \bar{x})(y_{(m+k)\Delta} - \bar{y}) & , k < N \\ 0 & , k \geq N \end{cases}$$

avec

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{k\Delta}$$

et

$$\hat{p}_{XY}^{(2)}(-k\Delta) = \hat{p}_{YX}^{(2)}(k\Delta)$$

5.3. Caractéristiques spectrales

5.3.1. Définitions

On appelle spectre de puissance la quantité :

$$C_{XX}(v) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T x_t e^{-2i\pi vt} dt \right|^2$$

On montre que :

$$C_{XX}(v) = F [P_{XX}^{(1)}(u)]$$

On définit le spectre croisé de deux processus par :

$$C_{XY}(v) = F [P_{XY}^{(1)}(u)]$$

5.3.2. Estimation

a) formules d'estimation

signal continu :

$$\hat{C}_{XX}(v) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T x_t e^{-2i\pi vt} dt \right|^2 = F [\hat{P}_{XX}^{(1)}(u)]$$

signal échantillonné

$$\hat{C}_{XX}(v) = \frac{1}{N\Delta} \left| \sum_{m=0}^{N-1} \Delta x_{m\Delta} e^{-2i\pi m\Delta v} \right|^2$$

ou

$$\hat{C}_{XX}(v) = \frac{\Delta}{N} \left| \sum_{m=0}^{N-1} x_{m\Delta} e^{-2i\pi v m\Delta} \right|^2$$

b) comportement de l'estimateur

$$\hat{C}_{XX}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{P}_{XX}^{(1)}(t) e^{-2i\pi vt} dt = \int_{-T}^T \hat{P}_{XX}^{(1)}(t) e^{-2i\pi vt} dt$$

donc

$$E [\hat{C}_{XX}(v)] = \int_{-T}^T E [\hat{P}_{XX}^{(1)}(t)] e^{-2i\pi vt} dt$$

$$E [\hat{C}_{XX}(v)] = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) P_{XX}^{(1)}(t) e^{-2i\pi vt} dt \quad (\text{cf } \S 5.2.3.a)$$

$$\text{Posons } w(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \quad (\text{Fig. 7})$$

$$\begin{aligned} \text{alors } E [\hat{C}_{XX}(v)] &= F(w) \otimes F(P_{XX}^{(1)}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} W(g) C_{XX}(v-g) dg \end{aligned}$$

On peut montrer que :

$$W(v) = T \left(\frac{\sin \pi T v}{\pi T v} \right)^2 \quad (\text{Fig. n° 8})$$

.../...

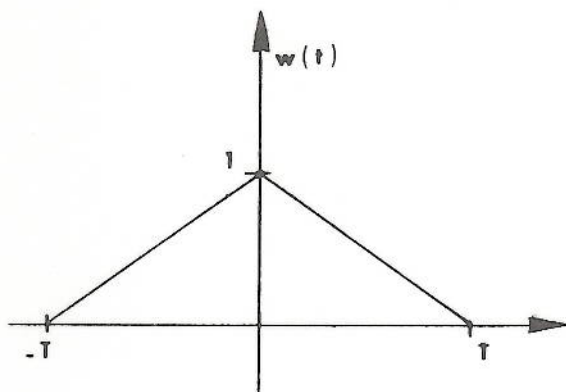


Figure n° 7

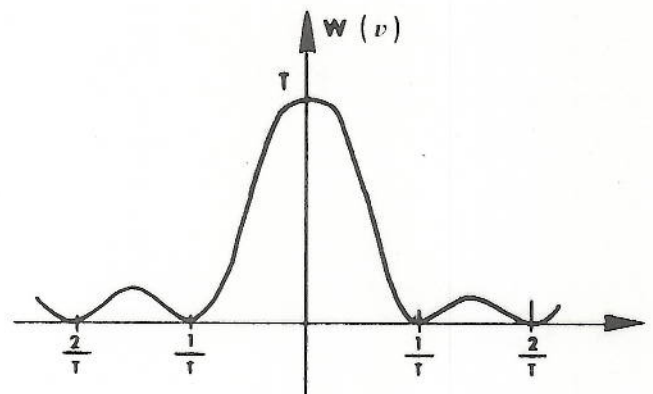


Figure n° 8

et
$$\lim_{T \rightarrow +\infty} W(v) = \delta_v$$

donc
$$\lim_{T \rightarrow +\infty} E[\hat{C}_{XX}(v)] = C_{XX}(v)$$

L'estimateur $\hat{C}_{XX}$ est asymptotiquement sans biais.

Si de plus on suppose que $C_{XX}(v)$ est sensiblement constant sur un intervalle de largeur $\frac{2}{T}$, alors :

$$E[\hat{C}_{XX}(v)] \simeq \int_{-1/T}^{1/T} W(g) C_{XX}(v-g) dg \simeq C_{XX}(v)$$

et le biais reste faible.

c) lissage de l'estimateur

La variance de $\hat{C}_{XX}$ peut être calculée dans le cas particulier d'un bruit blanc gaussien X_t :

$$\begin{cases} X_t \text{ suit une loi de probabilité gaussienne centrée} \\ p_{XX}^{(1)}(v) = 0 \quad \forall v \neq 0 \end{cases}$$

On montre alors que $\text{Var}[\hat{C}_{XX}(v)]$ est indépendant de la taille de l'échantillon. En particulier, la variance ne tend pas vers 0 lorsque T tend vers l'infini : on dit que l'estimateur est inconsistant.

Une méthode de lissage intuitive consiste à séparer la série de durée T en m sous-séries de durée $M = \frac{T}{m}$ et à faire pour chaque fréquence la moyenne des m valeurs $\hat{C}_{XX}^{(i)}(v)$ trouvées. En effet, si les sous-séries sont indépendantes, alors la variance de $\overline{\hat{C}}_{XX}(v) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{C}_{XX}^{(j)}(v)$ sera :

$$\text{Var} \overline{\hat{C}}_{XX}(v) = \frac{1}{m} \text{Var} \hat{C}_{XX}^{(j)}(v)$$

.../...

Mais, voyons l'influence du lissage sur le biais :

$$\hat{C}_{XX}^{(j)}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_{XX}^{(1)}(u) e^{-2i\pi v u} du$$

$$\hat{C}_{XX}^{(j)}(v) = \int_{-M}^M \left(\frac{1}{M} \int_{(j-1)M}^{jM-|u|} X_t X_{t+|u|} dt \right) e^{-2i\pi v u} du$$

Posons $\bar{p}_{XX}(u) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{1}{M} \int_{(j-1)M}^{jM-|u|} X_t X_{t+|u|} dt \right\}$

donc : $E[\bar{p}_{XX}(u)] = \frac{1}{m} \times m \cdot p_{XX}^{(1)}(u) \left(1 - \frac{|u|}{M}\right)$

Posons $w_B(u) = \begin{cases} 1 - \frac{|u|}{M} & , |u| \leq M \\ 0 & , |u| > M \end{cases}$

alors : $E[\bar{C}_{XX}(v)] = F(w_B) \otimes C_{XX}(v)$

La largeur du filtre w_B est $\frac{2}{M}$ soit $m \times \frac{2}{T}$: le filtre est élargi dans le rapport m . Si $C_{XX}(v)$ est sensiblement constant sur un intervalle de largeur $\frac{2}{T}$, il n'en est pas forcément de même sur un intervalle m fois plus large. On augmente donc le biais en voulant diminuer la variance. Il faut trouver un compromis entre les deux. La meilleure procédure consiste à en augmenter progressivement m ; une approximation par une loi du χ^2 permet de déterminer les intervalles de confiance et donc de décider si un pic est significatif ou non et si on peut augmenter ou diminuer m . On peut d'autre part modifier le filtre utilisé en fonction des résultats que l'on cherche.

d) approximation par une loi du χ^2

On peut montrer que $\frac{n \hat{C}_{XX}(v)}{C_{XX}(v)}$ suit approximativement une loi du χ^2 à n degrés de liberté avec

$$n = \frac{2T}{\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(t) dt} = \frac{2T}{\int_{-\infty}^{+\infty} W^2(v) dv}$$

On appelle largeur de bande de la fonction porte w la quantité b :

$$b = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(t) dt} = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} W^2(v) dv}$$

donc

$$n = 2T \cdot b$$

APPENDICE 2

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE I

E. FICHOT

Exposé critique de la théorie des marées

Annales du Bureau des Longitudes, Tome 11, 1938

ASSOCIATION D'OCEANOGRAPHIE PHYSIQUE

Bibliography on tides

Publication scientifique n° 15 - 1955 (1665 - 1939)

" " n° 17 - 1957 (1940 - 1954)

" " n° 29 - 1971 (1955 - 1969)

D.E. CARTWRIGHT

Marées océaniques

Revue Hydrographique Internationale, Vol n° 55, n° 2, juillet 1978, pp 35 à 90.

CHAPITRE II

G.W. LENNON

A critical examination of the conventional tide gauge

Actes du symposium sur les marées organisé par le Bureau Hydrographique International (Monaco, 28-29 avril 1967). UNESCO 1969, pp 29 à 43

D.T. PUGH

La physique des marégraphes pneumatiques

Revue Hydrographique Internationale, Vol n° 44, n° 2, juillet 1972, pp 77 à 106

L.M. SKINNER et J.B. RAE

The use of pressure sensors for tidal and water level measurements

Institute of Oceanographic Sciences Collected reprints 1974. Contribution n° 1014

UNESCO-SCOR working group 27

An intercomparison of open sea tidal pressure sensors

UNESCO technical papers in marine science, n° 21, 1975

S. DAILLET

Détermination par observation des trajectoires de satellites artificiels des ondes semi-diurnes de la marée océanique. Application au calcul de l'accélération séculaire de la lune.

Annales de Géophysique. Tome n° 34, n° 2, 1978, pp 79 à 88

I.J. WON et L.S. MILLER

Oceanic geoid and tides obtained from GEOS-3 satellite data in the North-west Atlantic Ocean

NASA Contractor report 156 845. Octobre 1978

D.E. CARTWRIGHT

Détermination des marées océaniques depuis l'espace

Commission Océanographique Intergouvernementale. Série technique n° 19, 1979, pp 57 à 65

D.A. KARUNARATNE

Méthode perfectionnée de lissage et d'interpolation des données horaires du niveau de la mer

Revue Hydrographique Internationale, Vol n° 57, n° 1, janvier 1980, pp 145 à 158

CHAPITRE III

BUREAU DES LONGITUDES

Annuaire pour l'an 1974

P. MELCHIOR

Earth tides

Observatoire royal de Belgique. Communications, série B, n° 90, 1974

BUREAU DES LONGITUDES

Encyclopédie scientifique de l'univers

Gauthiers Villars 1977-1979

CHAPITRE IV

P. MELCHIOR

The earth tides

Pergamon, 1966

E. LISITZIN

Sea level changes

Elsevier oceanography series, vol. 8, 1974

CHAPITRE V

M. ROLLET DE L'ISLE

Observation, étude et prédiction des marées

Service Hydrographique de la Marine, 1905 (réimpression 1945)

CHAPITRE VI

A.T. DOODSON

Développement harmonique du potentiel générateur de la marée

Revue Hydrographique Internationale, Vol. 31, n° 1, mai 1954, pp 37 à 61

D.E. CARTWRIGHT et R.J. TAYLER

New computations of the tide generating potential

The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, Vol. 23, n° 1, juin 1971, pp 45 à 73

D.E. CARTWRIGHT et A.C. EDDEN

Corrected tables of tidal harmonics

The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, Vol 33, n° 3, septembre 1973, pp 253 à 264

J. KRAVITCHENKO et C. LE PROVOST

Sur la théorie spectrale des marées littorales

Annales Hydrographiques, 5ème série, Vol. 5, fasc. 1, n° 746, 1977, pp 23 à 46

CHAPITRE VII

A. COURTIER

Marées

Service Hydrographique de la Marine 1938.

C. VILLAIN

Cours de marée

Ecole d'application du Service Central Hydrographique. Année 1943 - 1944

CHAPITRE VIII

A.T. DOODSON

L'analyse des observations de marée

1928. Traduction Service Hydrographique de la Marine. Section de documentation n° 38 d

M.T. MURRAY

Méthode générale d'analyse des hauteurs horaires de la marée

Revue Hydrographique Internationale, vol. n° 41, n° 2, juillet 1964, pp 99 - 116

G. GODIN

The analysis of tides

University of Toronto, 1972

Y. DESNOES

Le bruit dans les analyses de marée

Annales hydrographiques, 5ème série, vol. 5, fasc. 2, 1977, pp 31 - 46

Y. DESNOES, B. SIMON

Analyse et prédiction de la marée. Application aux marées du Havre et de Brest

Annales hydrographiques, 5ème série, vol. 5, fasc. 2, 1977, pp 47 - 62

CHAPITRE IX

W. MUNK et D.E. CARTWRIGHT

Tidal spectroscopy and prediction

Actes du symposium sur le matériel marégraphique et la prédiction des marées (Paris, 3-7 mai 1965), publication scientifique n° 27 de l'AOIP, pp 193 à 242

D.E. CARTWRIGHT

Some further results of the "reponse method" of tidal analysis

Actes du symposium sur les marées organisé par le Bureau Hydrographique International (Monaco, 28-29 avril 1967). UNESCO, 1969, pp 195-202

J.N. PASQUAY

Principes appliqués et méthodes utilisées pour l'établissement des tables permanentes des hauteurs d'eau

Annales hydrographiques, 5ème série, vol. 6, fasc. 1, 1978, pp 19-26

CHAPITRE X

M.T. MURRAY

Procédés de recherche des valeurs optimales dans l'analyse des marées

Revue hydrographique internationale, vol. 42, n° 1, janvier 1965, pp 75-84

A.M. SHIPLEY

Prédictions de marées par ordinateur numérique de moyenne dimension

Revue hydrographique internationale, vol. 43, n° 1, janvier 1966, pp 91-94

B.D. ZETLER

Computer applications to tide and current analysis in the Coast and Geodetic Survey

Actes du symposium sur les marées organisé par le Bureau Hydrographique International (Monaco, 28-29 avril 1967). UNESCO 1969, pp 75-78

B. SIMON

Marée en Gironde. Observations, analyse, prédiction

Etude n° 273 EPSHOM/E/OC, mai 1979. Service Hydrographique et Océanographique de la Marine.

B. SIMON

Prédiction de la marée à Brest

Etude n° 342 EPSHOM/E/OC, juillet 1980. Service Hydrographique et Océanographique de la Marine

CHAPITRE XI

A. COURTIER

Note sur la prédiction approchée de la marée de Brest à l'aide de la période chaldéenne

Recherches hydrographiques sur le régime des côtes. 27ème cahier (1936-1945) Service Hydrographique de la Marine, 1946, pp 123-222

N.C. GLEN

La méthode de prédiction des marées de l'Amirauté britannique (NP 159)

Revue hydrographique internationale, vol. n° 54, n° 1, janvier 1977, pp 77-89

CHAPITRE XII

A.I. PERESKOKOV

Calculation of extreme tidal sea levels based on non linear programming methods

Meteorologiya i Gidrologiya, n° 4, 1976, pp 60-67

B. SIMON

Réduction des sondes au large en Manche

Etude n° 216 EPSHOM/E/OC, avril 1978, Service Hydrographique et Océanographique de la Marine

Service Hydrographique et Océanographique de la Marine

Répertoire des zones de marée et des zéros hydrographiques sur les côtes métropolitaines

Annales hydrographiques, 5ème série, vol. 7, fasc. 1, 1979

J. LEGRAS

Algorithmes et programmes d'optimisation non linéaire avec contraintes
Application au calcul optimal
Masson 1980

D.B. THOMSON et E.G. OKENNA

Analytical models for automated water level reduction of soundings
Light house, n° 21, avril 1980, pp 16-27

CHAPITRE XIII

G. DUCHER

Les tendances actuelles de l'organisation du matériel marémétrique à l'IGN
Actes du symposium sur le matériel marégraphique et la prédiction des marées (Paris, 3-7 mai 1965). Publication scientifique n° 27 de l'AIOP, pp 99-116

E. LISITZIN

Sea level changes

Elsevier oceanography series, vol. 8, 1974

A. DEMERLIAC

Calcul du niveau moyen journalier

Annales hydrographiques, 5ème série, vol. 2, fasc. 1, 1974, pp 49-57

I. FISCHER

Mean sea level and the marine geoid. An analysis of concepts
Marine Geodesy, vol. 1, n° 1, 1977, pp 37-59

W.D. KAHN, B.B. AGRAWAL, R.D. BROWN

Mean sea level determination from satellite altimetry
Marine Geodesy, vol. 2, n° 2, 1979, pp 127-144

B. SIMON

Etude de la variation du niveau moyen en Manche

Annales hydrographiques, 5ème série, vol. 7, fasc. 2, 1979, pp 27-46

CHAPITRE XIV

H. LACOMBE

Détermination de la marée au large à partir des courants de marée
Annales hydrographiques, 3ème série, tome 21, 1949, pp 203-239

G. NEUMAN

Ocean currents

Elsevier oceanography series, vol. 4, 1968

J. SIESS

Etude sur le champ de courants dans la zone de déblai du Sud des Pierres Noires

Etude n° 546 EPSHOM/E/OC, novembre 1976, Service Hydrographique et Océanographique de la Marine

W.J. GOULD

Measurements of currents in the open sea

Institute of Oceanographic Sciences, report n° 54, novembre 1977

G. BESSERO

Analyse des observations de courant. Première partie : analyse spectrale et analyse harmonique

Etude n° 493 EPSHOM/E/OC, septembre 1979, Service Hydrographique et Océanographique de la Marine

CHAPITRE XV

M. COMOY

Etude pratique sur les marées fluviales et notamment sur le mascaret Gauthiers Villars, 1881.

C. VILLAIN

Cartes des lignes cotidales dans les océans

Annales hydrographiques, 4ème série, tome 3, 1952, pp 269-388

A. DEFANT

Physical Oceanography, volume II

Pergamon, 1961

D. LAVAL

Cours de travaux maritimes

Ecole Nationale Supérieure des Ponts et Chaussées, 1963

A.T. IPPEN

Estuary and coast line hydrodynamics

Mac Graw Hill, 1966

M.C. HENDERSHOTT

Ocean tides

E.O.S. Transactions of the American Geophysical Union, vol. 54, n° 2, février 1973, pp 76-86

M.B. ABBOTT

Les modèles mathématiques dans l'ingénierie hydraulique et côtière

Terra et Aqua, n° 11, mai 1976, pp 8-17

R. BONNEFILLE
Cours d'hydraulique maritime
Masson, 1976

A.M. DAVIES
A numerical model of the North Sea and its use in choosing locations for the deployment of off-shore tide gauges in the JONSDAP'76 oceanographic experiment
Deutsche Hydrographische Zeitschrift, vol. n° 29, n° 1, 1976, pp 11-24

R.A. FLATHER
A tidal model of the north-west European continental shelf
Institute of Oceanographic Sciences, Collected reprints, 1976, contribution n° 1141

G. CHABERT D'HIERES et C. LE PROVOST
Synthèse sur la détermination des principales composantes de la marée dans la Manche, résolue à l'aide du modèle réduit de Grenoble.
Annales hydrographiques, 5ème série, vol. 5, fasc. 1, 1977, pp 47-55

C. MC CAMMON et C. WUNSCH
Tidal charts of the Indian Ocean north of 15°S
Journal of Geophysical Research, vol. 8, n° 37, décembre 1977, pp 5993-5998

W. ZAHÉL
A global hydrodynamic-numerical 1° - model of the ocean tides ; the oscillation system of the M₂ tide and its distribution of energy dissipation.
Annales de Géophysique. Tome n° 33, n° 1-2, 1977, pp 31-40

D.E. CARTWRIGHT
Marées océaniques
Revue hydrographique internationale, vol. n° 55, n° 2, juillet 1978, pp 35-90

G. CHABERT D'HIERES et C. LE PROVOST
Atlas des composantes harmoniques de la marée dans la Manche
Annales hydrographiques, 5ème série, vol. 6, fasc. 3, 1978, pp 5-36

R.D. PINGREE et L. MADDOCK
The M₄ tide in the English Channel derived from a non-linear numerical model of the M₂ tide.
Deep Sea Research, vol. 25, n° 1, janvier 1978, pp 53-63

B. SIMON
Marée en Gironde. Observations, analyse, prédiction
Etude n° 273 EPSHOM/E/OC, mai 1979, Service Hydrographique et Océanographique de la Marine

M.E. PARKE, M.C. HENDERSHOTT

M_2 , S_2 , K_1 models of the global ocean tide on an elastic earth
Marine Geodesy, vol. 3, n° 1-4, 1980, pp 379-408

E.W. SCHWIDERSKI

Ocean tides

Marine Geodesy, vol. 3, n° 1-4, 1980, pp 161-255.